الرائع

في

الرياضيات

السنة الأولى ثانوي

1AS

ency-education.com

موجه لتلاميذ:

الجذع المشترك

علوم

تكنولوجيا

- دروس ملخصة
- 134 تمرينا مع حلولها المفصلة
- 54 تطبيقا مباشرا مع حلولها
- 127 سؤالا (اختبر معلوماتك)

وفق البرنامج الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية

تأليف:
لعزيلي يحيى

الرائع في الرياضيات

السنة الأولى ثانوي

وفق البرنامج الجديد المقرر

من طرف وزارة التربية الوطنية

الجذع المشترك : علوم وتكنولوجيا

- دروس ملخصة
- 134 تمرينا مع حلولها المفصلة
- 54 تطبيقا مباشرا مع حلولها
- 127 سؤالا (اختبر معلوماتك)

تأليف : لعزيلي يحي

الإيداع القانوني 1746-2005
ردمك: 3-54-721-9961

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبيّه الصادق الأمين، وعلى آله وصحبه الغرّ الميامين ، ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

بمشيئة الرحمن يسعدني أن أضع بين أيدي تلاميذ العلم والمعرفة، السنة الأولى ثانوي، هذا الكتاب المتواضع، تواضع أهلي العلم، في جزئه الأول من سلسلة " الرائع في الرياضيات " أملا من العلي القدير أن يجعله بذرة خير، تزرع وتنمو، ويتذوق طعمها التلاميذ والأساتذة وأن يستقبل بصدور رياضياتية، رحبة في الأسرة التربوية .

إنما نبدأ تدريجيا في اكتشاف عالم الرياضيات في الثانوية ، وسواءا كانت دراستنا في فروع العلوم السياسية أو العلوم التطبيقية، فإن تقدمنا شيئا فشيئا فيها يجعلنا ندرك أن الرياضيات صرح تنسجه عناصر المعرفة على فضاءات من المهارة .

نتفق جميعا أن القدرة على حل المسائل تستوجب الإلمام بكم هائل من المعرفة، ولكن علينا أن لا ننكر أو نتجاهل وجوب التمكن من الفنون استعمال هذا الكمّ.

أعزائي التلاميذ أملي أن تتعلموا مختلف العلوم الأساسية وخاصة لغة السين (الـx) التي تهدف إلى تهذيب وترقية فكر التلميذ، وتطوير وسائله في الاستدلال ، وتعويده على مناقشة وحل المسائل. إنه بالعمل والمثابرة والبحث، والصبر باستمرار ستتذوقون بالتأكيد ثمرة النجاح وهي أمنيتكم جميعا، في امتحان مفتاح المستقبل امتحان شهادة البكالوريا

محتويات الكتاب

يحتوي هذا الكتاب في جزئه الأول من سلسلة " الرائع في الرياضيات " على التطبيقات وتمارين محلولة بالتفصيل ، مرفقة بالدروس، لمستوى السنة الأولى ثانوي، الجذع المشترك : علوم وتكنولوجيا ، حيث اعتمادنا في هذا الكتاب القيم الترميز العالمي، الذي يفتح آفاق كبيرة في مجال الاستغلال العلمي .

كما نشير أنه تمّ بناء مضمون هذا الكتاب وفقا للبرنامج الرسمي المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية في ديسمبر 2004م .

ومن أهداف هذه السلسلة :

- اكتساب المهارات والتعوّد على حل ومناقشة المسائل.
- تلقين المعرفة كما سطرتها البرامج الرسمية
- التحكم الجيّد في آليات الحساب وتقنياتها .
- ونذكر أنه تمّ تقديم هذه الدروس بطريقة لا تدع مكانا للغموض والتمارين المحلولة وضعت بهدف التمكن من التعامل مع المعارف الجديدة واكتساب أنماط وتقنيات التفكير في نفس الوقت .

تأليف : لعزيلي ي

أستاذ مادة الرياضي

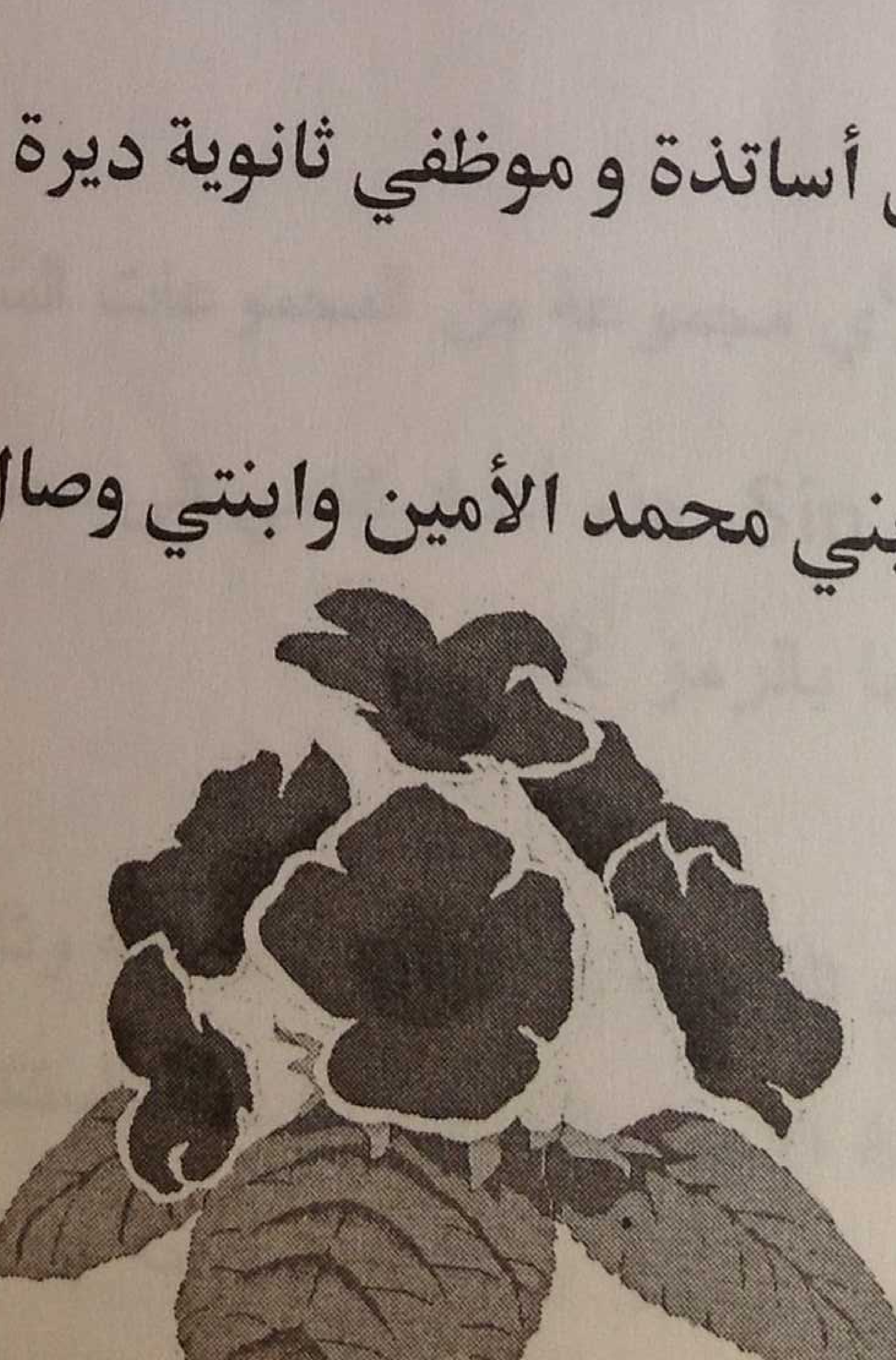
الإهداء

إلى كل من يحب بلد المليون والنصف مليون من الشهداء ، ويسعى جاهدا بكل ما يملك في بناء جزائر العزة والكرامة .

إلى أبطال بلاد الرافدين الذين دحروا مغول العصر، بدرس لن ينس سجّله التاريخ بحروف من ذهب .

إلى أساتذة و موظفي ثانوية ديرة

إلى ابني محمد الأمين وابنتي وصال .



الأنشطة العددية

1 مجموعات الأعداد- الأعداد الأولية- القيمة المطلقة والمجالات- الجذور التربيعية - المتباينات والحصر

معارف :

مجموعات الأعداد :

1) مجموعة الأعداد الطبيعية هي:...;0;1;2;3;4;5 وندل عليها بالرمز N

2) مجموعة الأعداد الصحيحة هي:... ;-2;-1;0;1;2;3;... ونـدل عليهـا بالرمز Z

3) مجموعة الأعداد العشرية هي : ...;-3,5;-4;0;1,7;56;... وندل عليها بالرمز D

الأعداد العشرية تكتب على الشكل $a\times10^{b}$ حيث $a\in Z$ و $b\in Z$

4) مجموعة الأعداد الناطقة تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث $a\in Z$ و $b\in N^*$

وندل عليها بالرمز Q

5) توجد أعداد لا تنتمي لأي مجموعة من المجموعات السابقة مثل: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ، π ، $-Cos30°$ ، $\text{Sin}\ 21°$. هذه أعداد تنتمي إلى مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية وندل عليها بالرمز R.

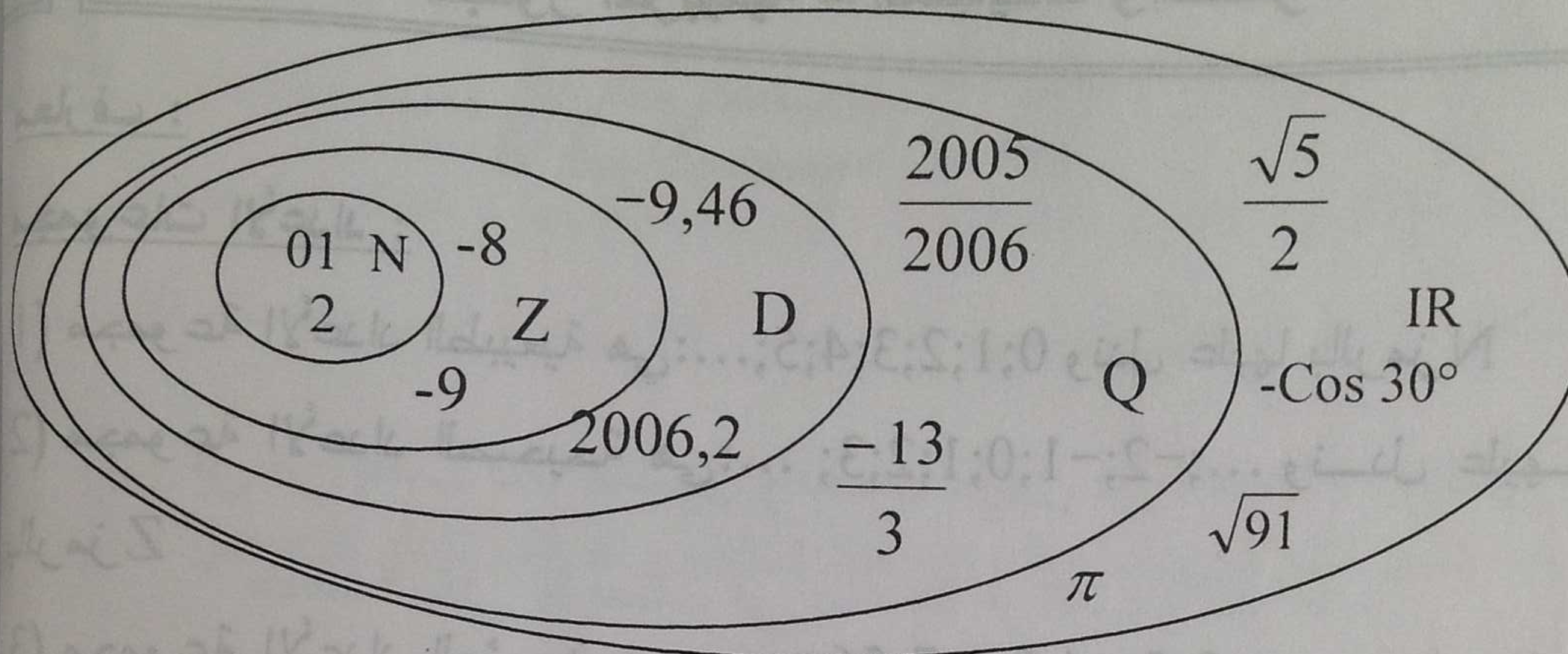
ملاحظات :

1) الصفر هو العدد الوحيد الذي له تارة إشارة موجبة وتارة إشارة سالبة .

2) R^* ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما عد (باستثناء) الصفر.

3) R_+ ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (بما فيها الصفر) ، وR_- ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة (بما فيها الصفر) .

الرمز ينتمي (∈) يربط بين عنصر ومجموعة، بينما الرمز (⊂) الاحتواء يربط بين مجموعتين مثل $-13 \in D, \frac{-13}{3} \notin D$ ، $Z \subset R$



تطبيق 1: ضع مكان كل فراغ إحدى الرموز : $\not\subset, \subset, \notin, \in$

$R_+ \ldots\ldots R$ ، $(1+\sqrt{2}) \ldots\ldots R$ ، $Q \ldots\ldots Z$ ، $\frac{2}{3} \ldots\ldots D$ ، $Z \ldots\ldots R$

$\pi \ldots\ldots Q$ ، $\frac{-4}{5} \ldots\ldots Z$ ، $(-7) \ldots\ldots Q$ ، $Q \ldots\ldots N$

الحل :

$R_+ \subset R$ ، $(1+\sqrt{2}) \in R$ ، $Q \not\subset Z$ ، $\frac{2}{3} \notin D$ ، $Z \subset R$

$\pi \notin Q$ ، $\frac{-4}{5} \notin Z$ ، $(-7) \in Q$ ، $Q \not\subset N$

2/ الأعداد الأولية:

تعريف: يكون العدد الطبيعي a أوليا إذا كان عدد قو اسمه اثنين.

تطبيق 2:

* 0 و 1 هما عددان طبيعيان غير أوليين .
* الأعداد الأولية الأقل من 20 هي: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19.

تحليل عدد طبيعي غير أولي إلى جداء عوامل أولية :

الخاصية 1: كل عدد طبيعي غير أولي أكبر تماما من 2 يكتب على شكل جداء أعداد أولية .

تطبيق 3:

$3388 = 2^2\times7\times11^2$ ، $600 = 2^3\times3\times 5^2$

3/ الأعداد و الترتيب

لتكن a، b، c، d أعداد حقيقية .

الخاصية1: إذا كان $a<b$ و $b<c$ فإن $a<c$

الخاصية2:

* إذا كان $a>0$ و $b>0$ و $a>b$ فإن $a^2>b^2$ و $\sqrt{a}>\sqrt{b}$
* إذا كان $a>0$ و $b>0$ و $a<b$ فإن $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

الخاصية3:

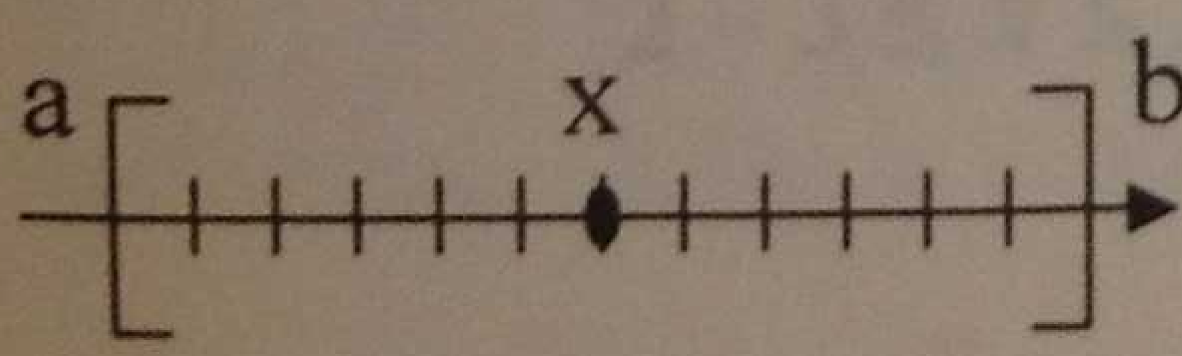
* إذا كان $a<b$ و $c<d$ فإن $a+c<b+d$
* إذا كانت d,c,b,a أعداد حقيقية موجبة و $a<b$ و $c<d$ فإن $ac<bd$

تطبيق4:

* إذا كان $\sqrt{2}<\pi$ و $\pi<3{,}15$ فإن $\sqrt{2}<3{,}15$
* إذا كان $-5<-3$ فإن $(-5)^2>(-3)^2$

4/ المجالات في R

تعريف : a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينة $a\le x\le b$ تسمى مجالا مغلقا من R وتدل عليها بالرمز $[a,b]$ وتكتب $[a,b]=\{x\in R : a\le x\le b\}$.

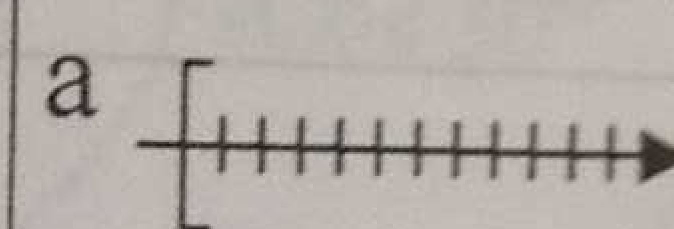
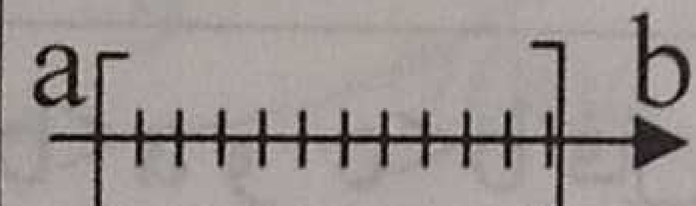
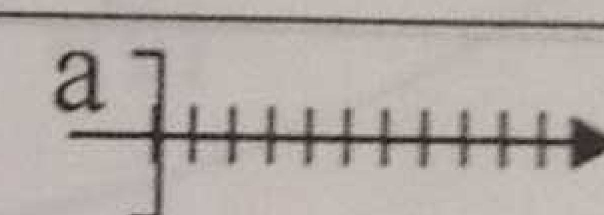
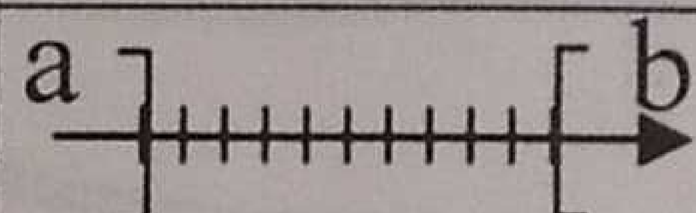
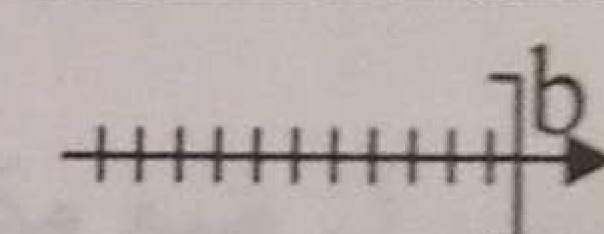
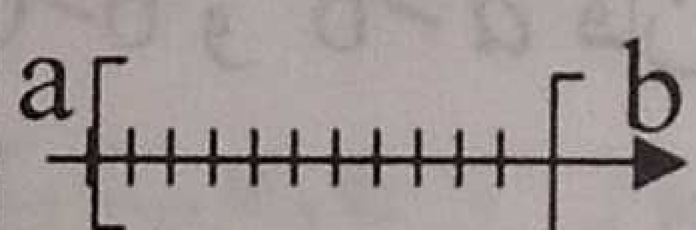
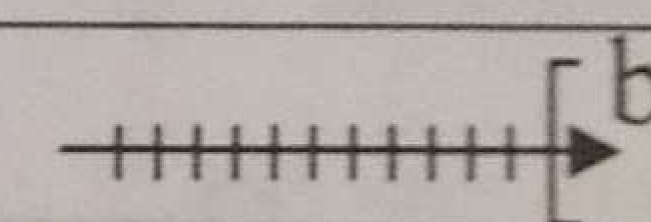
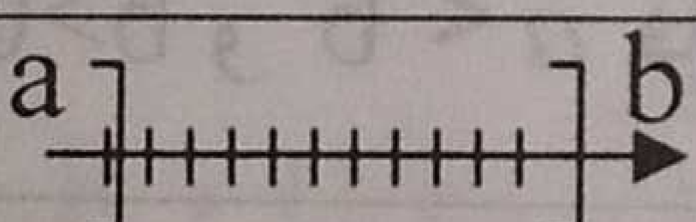


العدد الحقيقي $b-a$ يسمى طول المجال $[a,b]$.

الجزء المظل المبين في الشكل هو التمثيل البياني للمجال المغلق [a,b] على محور موجه للأعداد الحقيقية . (a و b ينتميان إلى المجال [a,b]).

نتائج هامة :

يمكن استنتاج تعاريف بعض المجالات المحددة وغير المحددة.

التمثيل على مستقيم موجه	المتباينة	المجال	التمثيل على مستقيم موجه	المتباينة	المجال
	$x \geq a$	[a,+∞[		$a \leq x \leq b$	[a,b]
	$x > a$	]a,+∞[		$a < x < b$	]a,b[
	$x \leq b$	]-∞,b]		$a \leq x < b$	[a,b[
	$x < b$	]-∞,b[		$a < x \leq b$	]a,b]

]a,b[يسمى مجال مفتوح ، و [a,b[مجال مغلق في a ومفتوح في b

<u>تطبيق 5 :</u>

ضع مكان كل فراغ إحدى الرموز $\in, \subset, \notin, \not\subset$

$1 ...]0 ،1[$ ، $[4، 5[...]3 ، +\infty[$ ، $5 ....]-4 ، 5]$

$2005 ..... [2005 ،2006]$ ، $-8 .....]-\infty ،-2]$ ، $[-1 ،1] ....]-3، 1[$

<u>الحل :</u>

$1 \notin]0، 1[$ ، $[4، 5[\subset]3، +\infty[$ ، $5 \in]-4، 5]$

$2005 \in [2005، 2006]$ ، $-8 \in]-\infty ، -2]$ ، $[-1، 1] \not\subset]-3، 1[$

تعريف : المسافة بين العددين الحقيقيين x و y هي العدد الحقيقي الموجب . $x-y$ أو $y-x$ وندل عليها بالرمز $|x-y|$ ونقرأ القيمة المطلقة للعدد $x-y$

تطبيق6: $5 = |7-2|$ ، $|8-14| = 6$ ، $|47-60| = 13$

ملاحظة : المسافة بين العددين الحقيقيين x و y تساوي المسافة MN، حيث M نقطة فاصلتها x، و N نقطة فاصلتها y في مستقيم موجه.

✓ **القيمة المطلقة لعدد حقيقي :**

تعريف : القيمة المطلقة لعدد الحقيقي x هي المسافة بين x و o وندل عليها بالرمز $|x|$ وهي دوما عدد حقيقي موجب.

* إذا كان $x \geq o$ فإن $|x| = x$

* إذا كان $x \leq o$ فإن $|x| = -x$

الخاصية1: المسافة بين العددين الحقيقيين x و y تساوي المسافة بين العددين الحقيقيين y و x أي $\|x-y\| = \|y-x\|$
الخاصية2: إذا كان c عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب فإن العبارات الأربعة متكافئة .   * المسافة بين x و c أصغر من أو تساوي r * $\|x-c\| \leq r$ * $x \in [c-r, c+r]$ * $c-r \leq x \leq c+r$

تطبيق7 : عين الأعداد الحقيقية x بحيث تكون المسافة بين x و 2 أصغر من أو تساوي 3.

الحل :

$|x-2| \leq 3$ معناه $-3 \leq x-2 \leq 3$ أي $2-3 \leq x \leq 3+2$

ومنه $-1 \leq x \leq 5$ أي $x \in [-1 ، 5]$.

* $x \in [c-r, c+r]$ معناه x ينتمي إلى المجال ذو المركز c ونصف القطر r.

* مركز المجال [a,b] هو $\frac{a+b}{2}$ ، ونصف قطره هو $\frac{b-a}{2}$

<u>**خواص القيمة المطلقة :**</u> a و b عددان حقيقيان .

1) $\sqrt{a^2} = |a|$ ، 2) $|ab| = |a| \times |b|$

3) $|-a| = |a|$ ، 4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

5) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

<u>**تعيين طبيعة عدد:**</u>

تعيين طبيعة عدد يعني معرفة هل هو طبيعي، صحيح، عشري، ناطق، حقيقي؟

<u>**تطبيق8:**</u> عين طبيعة كلا من الأعداد التالية :

$$\frac{\sqrt{36}}{6} ، -1,26 \times \frac{1}{18} ، \frac{50}{30} ، \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2}$$

<u>**الحل :**</u>

$\frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{\sqrt{6^2}}{3} = \frac{6}{3} = 3$ ومنه $\frac{\sqrt{36}}{3}$ عدد طبيعي.

$\frac{-1,26}{18} = -0,07$ ومنه $\frac{-1,26}{18}$ عدد عشري ، $\frac{50}{30} = \frac{5}{3} \in Q$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}+2} \in R$$

6/ <u>الجذور التربيعية :</u>

من أجل كل عدد حقيقي موجب a، يوجد عددين حقيقيين متناظرين مربع كل منهما يساوس a أي $(-\sqrt{a})^2 = (+\sqrt{a})^2 = a$

خواص : a و b عددان حقيقيان موجبان

1) $(\sqrt{a})^2 = a$ ، 2) $\sqrt{a^2} = a$

3) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ، 4) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (b \neq 0)$

كتابة مقام عدد حقيقي على شكل عدد صحيح: (التخلص من رمز $\sqrt{}$ في مقام الكسر)

* إذا كان مقام الكسر من الشكل $\sqrt{a}$ نضرب بسط ومقام هذا الكسر في العدد $\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$

* إذا كان مقام الكسر من الشكل $x+\sqrt{y}$ (أو $x-\sqrt{y}$) نضرب بسط ومقام الكسر في العدد $x-\sqrt{y}$ (أو $x+\sqrt{y}$) $y \geq 0$.

* إذا كان مقام الكسر من الشكل $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (أو $\sqrt{x}-\sqrt{y}$) نضرب بسط ومقام هذا الكسر في العدد $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (أو $\sqrt{x+\sqrt{y}}$). $x \geq 0$ و $y \geq 0$

تطبيق 9:

حول مقام كلا من الكسرين $\frac{7}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3+\sqrt{2}}$ إلى عدد طبيعي صحيح.

الحل :

$$\frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5 \times \sqrt{5}}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{2}} = \frac{2 \times (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2}) \times (3-\sqrt{2})} = \frac{6-2\sqrt{2}}{7}$$

✓ **البحث عن العدد الطبيعي الأولي:**

لمعرفة عدد طبيعي a إن كان أوليا، نحسب حاصل وباقي قسمة العدد a على كل الأعداد الأولية 2، 3، 5، 7، 11 ..... ونتوقف عن العملية إذا كان الحاصل أصغر من القاسم عندئذ يكون العدد a أوليا .

تطبيق 10 : هل العدد 197 أوليا ؟

الحل :

بما أن $197 : 17 = 11,5$

و$11,5<17$ فإن العدد 197 أوليا

العدد a	الأعداد الأولية	الباقي
197	2	1
	3	2
	5	2
	7	1
	11	10
	13	2
	17	10

✓ **رتبة قدر مقدار :**

تعريف : رتبة قدر مقدار عدد عشري مكتوب في شكله العلمي $K\times10^n$ هي العدد $K'\times10^n$. حيث K' هو المدور إلى الوحدة للعدد K.

تطبيق 11 : هل الأعداد 91، 223، 301 أولية ؟

✓ **تحليل عدد مركب من جداء عددين أو أكثر إلى جداء عوامل أولية :**

نحلل كل عدد إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب الجداء (باستعمال خواص القوى)

تطبيق 12 : حلل العدد $35\times120\times56$ إلى جداء عوامل أولية .

الحل :

نعلم أن $56= 2^3\times7$ ، $120 = 2^3\times3\times5$ ، $35 = 5\times7$

$$56\times120\times35 = 2^3\times7\times2^3\times3\times5\times5\times7=(2^3\times2^3)\times(3)\times(5\times5)\times(7\times7)$$

$$=2^6\times3\times5^2\times7^2$$

✓ **مقارنة عددين حقيقيين :**

يكون العدد الحقيقي a أكبر من أو يساوي العدد الحقيقي b إذا كان $a-b\geq0$

أي $a\geq b$.

ملاحظة :

* لتسهيل المقارنة بين العددين الحقيقيين a و b توجد عدة طرق منها نحسب الفرق a-b ، أو نبسط كل من a و b ونحسب الفرق a-b، أو نوحد مقامي العددين إذا كان على شكل كسرين ، أو نقارن بين مربعيهما a^2 و b^2 إذا كان a>0 و b>0.

تطبيق 13:

1) قارن بين العددين a و b حيث $a=(\sqrt{3}+5)^2$ ، $b=10\sqrt{3}$

2) قارن بين العددين a و b حيث $a=\sqrt{4+3\sqrt{2}}$ ، $b=\sqrt{7+3\sqrt{2}}$

الحل:

1) $a-b=(\sqrt{3}+5)^2-10\sqrt{3}=3+25+10\sqrt{3}-10\sqrt{3}=28$

بما أن 28>0 فإن a-b>0 ومنه a>b.

2) $a^2-b^2=\sqrt{4+3\sqrt{2}}\,)^2-(\sqrt{7+3\sqrt{2}}\,)^2=4+3\sqrt{2}-(7+3\sqrt{2})$

$=4+3\sqrt{2}-7-3\sqrt{2}=-3$

بما أن a و b موجبان و $a^2-b^2<0$ فإن a<b.

✓ **المتباينات والحصر :**

حصر عدد حقيقي :

a، b، 'a، 'b أعداد حقيقية حيث a<x<b ...(1) و $a'<x'<b'$ ...(2)

حصر مجموع وفرق عددين حقيقيين :

بجمع المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد $a+a'<x+x'<b+b'$

ومنه المجال $]a+a' ، b+b'[$ هو حصر للعدد $x+x'$

نضرب طرفي المتباينة (2) في العدد (1-) نجد: $-b'<-x'<-a'$.... (3)

بجمع المتباينتين (1) و(3) طرفا لطرف نجد : $a-b'<x-x'<b-a'$

ومنه المجال $]a-b' ، b-a'[$ هو حصر للعدد $x-x'$.

حصر جداء عدد حقيقيين :

a، b، 'a، 'b أعداد حقيقية موجبة نضرب أطراف المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد: $aa' < xx' < bb'$ ومنه المجال $]aa' , bb'[$ هو حصر للعدد xx'

حصر حاصل قسمة عدد حقيقيين غير معدومين :

a، b، 'a، 'b أعداد حقيقية موجبة تماما بقلب أطراف المتباينة (2) نجد :

$\frac{1}{b'} < \frac{1}{x'} < \frac{1}{a'}$....(4) ثم نضرب أطراف المتباينتين (1) و(4) طرفا لطرف نجد $\frac{a}{b'} < \frac{x}{x'} < \frac{b}{a'}$ ومنه المجال $]\frac{a}{b'} , \frac{b}{a'}[$ هو حصر للعدد $\frac{x}{x'}$

حصر جذر تربيعي لعدد حقيقي موجب :

a و b عددان موجبان نجد أطراف المتباينة (1) نجد :

$\sqrt{a} < \sqrt{x} < \sqrt{b}$ ومنه $]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$ هو حصر للعدد $\sqrt{x}$.

تطبيق 14:

نعتبر الحصرين (1)....$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ ، (2)....$2.23 < \sqrt{5} < 2,24$

أوجد حصر العددين $\sqrt{5} \times \sqrt{3} , \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ بتقريب 10^{-2}.

الحل

– نضرب أطراف المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد:

$1,73 \times 2,23 < \sqrt{5} \times \sqrt{3} < 1,74 \times 2,24$ أي $3,85 < \sqrt{5} \times \sqrt{3} < 3,89$.

بقلب أطراف المتباينة (1) نجد: $\frac{1}{1,74} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{1,73}$ ....(3).

نضرب أطراف المتباينتين (2) و(3) طرفا لطرف نجد:

$2,23 \times \frac{1}{1,74} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} < 2,24 \times \frac{1}{1,73}$ أي $1,28 < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} < 1,29$.

ملاحظة: مربع أي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب أو معدوم أي $a^2 \geq 0$

اختبر معلوماتك :

بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1- الأعداد $-1.5, \frac{20}{50}, \frac{\sqrt{16}}{25}$ هي أعداد عشرية.

2- الجمل التالية كلها صحيحة: $5 \in [5 ،9]$ ، $\frac{5}{4} \in Q$ ، $\sqrt{27} \times \sqrt{243} \in N$

3- الأعداد التالية : 63 ، 101 ،97 هي أعداد أولية.

4- $\sqrt{a^4} = a^2, (\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$. a عدد حقيقي موجب .

5- حاصل قسمة عددين طبيعيين هو دائما عدد عشري.

6- جداء عددين أوليين هو دائما عدد أولي .

7- إذا كان $b - a = -144$ فإن $b > a$.

8- إذا كان $-1 \langle x \langle 3$ و $4 \langle y \langle 9$ فإن $-4 \langle xy \langle 27$

9- إذا كان $3 \langle x \langle 5$ و $2 \langle y \langle 4$ فإن $\frac{3}{2} \langle \frac{x}{y} \langle \frac{5}{4}$.

10- كل الجمل التالية صحيحة : $1 \in [2,1 ، 3]$ ، $\frac{1}{2} \subset [0 ، 1]$ ، $\frac{1}{8} \in D$.

11- العدد $|7+9|$ يعبر عن المسافة بين العددين 7 و 9.

12) $|x| \leq a$ معناه $-a \leq x \leq a$ ، a عدد حقيقي موجب.

التمرين 1

أكمل الجدول التالي وذلك بكتابة العدد في الخانة المناسبة إذا كان ينتمي إلى المجموعة ، وبكتابة العلامة × إذا كان العدد لا ينتمي إلى المجموعة.

	N	Z	D	Q	R
$-7,9$					
$-\sqrt{169}$					
$\sqrt{6}+5$					
$\frac{357}{17}$					
$\frac{\pi}{3}$					
$\frac{\sqrt{81}}{12}$					

التمرين 2 :

x وy عددان حقيقيان حيث $x<y$ ضع في مكان كل فراغ إحدى الرمزين >

$x-7.....y-7$ ، $-7x......-7y$ ، $\frac{1}{\pi}x.....\frac{1}{\pi}y$ ، $\sqrt{15}x.......\sqrt{15}y$

$-2x-9.....-2y-9$ ، $-\frac{3}{5}x+2.......-\frac{3}{5}y+2$ ، $\sqrt{2}x.....\pi\sqrt{2}y$

التمرين 3 : أحسب القيمة المطلقة لكل من الأعداد التالية .

-9 ، $\frac{-7}{4}$ ، 0 ، $1-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{23}-\sqrt{3}$ ، $3,14-\pi$ ، $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

التمرين 4:

x و y عددان حقيقيان حيث $3 \leq x \leq 7$ و $2 \leq y \leq 5$

أوجد حصرا لكل من الأعداد التالية : $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}, x^2-y^2$

التمرين 5:

أكتب الكسرين A و B على شكل كسرين مقام كلا منهما عددا طبيعيا ثم أحسب A+B.

$A = \frac{-2}{5-\sqrt{3}}$ ، $B = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

التمرين 6:

عين مجموعة تقاطع أو اتحاد المجالين في كل حالة .

أ) $[5،10]\cap[2،6]$ ، $]-\infty،0[\cap[-5،+\infty[$ ، $[-3،-1[\cap]-9،-1]$

ب) $[5،10]\cup[2،6]$ ، $]-\infty،0[\cup[-5،+\infty[$ ، $[-3،-1[\cup]-9،-1]$

التمرين 7:

عبّر لغويا (بالمسافات) ماتمثله كل مساواة ممايلي:(x عدد حقيقي و y عدد حقيقي)

$|x-7|=4$ ، $|x|=\frac{8}{5}$ ، $|x+y|=3$ ، $|y+5|=1,4$ ، $|1,5-x|=1$

التمرين 8:

جد مقلوب كل عدد مما يلي ثم أكتب هذا المقلوب على شكل كسر مقامه عدد طبيعي.

$\sqrt{4}-\sqrt{3}, \sqrt{2006}-\sqrt{2005}, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ n عدد طبيعي.

التمرين 9:

عيّن الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينة في كل حالة مما يلي:

$|2x-5|\leq 9$ ، $|1-5x|<4$ ، $|\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}|\leq\frac{17}{8}$

التمرين 10: قارن بين العددين a و b في كل حالة مما يلي :

1) $a=\frac{1}{4-\sqrt{2}}$ ، $b=\frac{1}{4+\sqrt{2}}$

2) $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، $b=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$

التمرين 11 :

يدل الرمز PGCD (a،b) على القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a، في كل حالة حلّل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم أحسب .PGCD(a,b)

1) $a = 36\times 81$ ، $b = 24\times 50$

2) $a = 132$ ، $b = 63\times 42$

التمرين 12 :

عبّر عن الجمل اللغوية التالية باستعمال عبارات تحتوي على رمز قيمة مطلقة

1) المسافة بين العدد الحقيقي x و (-4) تساوي 3.

2) المسافة بين العدد الحقيقي y و 1,5 أصغر من أو تساوي 10 .

3) المسافة بين العددين الحقيقيين x و y أكبر من أو تساوي 8,5 .

4) المسافة بين العددين y و 2005 أصغر من أو تساوي 2006.

5) المسافة بين العددين $(-x)$ و (-4) تساوي 27 .

التمرين 13 :

1) بين أن العدد الطبيعي الوحيد a الذي يحقق المتباينة $|a-2005|<0,5$ هو .2005

2) قارن بين العددين $\frac{4+\pi}{4}$ و $\frac{3+\pi}{3}$ ثم العددين $3+\sqrt{3}$ و $\sqrt{12+5\sqrt{3}}$

التمرين 14:

احسب الأعداد التالية من أجل $x = -3$, $y = 17$, $Z=-11$.

$|x+z|$ ، $|x|+|z|$ ، $|x+y+z|$ ، $|x|+|y|+|z|$

$-x\ |y+z|$ ، $y + |x+y-z|$ - z

التمرين 15:

1) عيّن قيم العدد الطبيعي p بحيث يكون العدد $\frac{p+8}{p}$ طبيعيا .

2) عيّن قيم العدد الطبيعي a بحيث يكون العدد $\frac{a+7}{a-1}$ طبيعيا .

التمرين 16: أوجد حصرا للجداء xy في كل حالة .

1) $2 < x < 7$ و $3 < y < 9$

2) $-3 < x < -1$ و $10 < y < 19$

3) $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$ و $-1-\sqrt{2} < y < -\sqrt{2}$

التمرين 17:

أكتب الأعداد التالية على الشكل $p\sqrt{a}$ حيث a عدد طبيعي أصغر عدد ممكن و p عدد حقيقي .

$\sqrt{6}\times\sqrt{48}$ ، $\sqrt{3^2+4^2}$ ، $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$ ، $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ، $\sqrt{0,0075}$

التمرين 18:

بدون استعمال الآلة الحاسبة احسب الجذر التربيعي لكل مـن العـددين a و b

حيث : $a = 2^6\times3^2\times5^4$ ، $b = 5^4\times11^6\times13^2$

التمرين 19: بين أن العددين a و b طبيعيان .

$$b = (\sqrt{120}-\sqrt{20})(\sqrt{120}+\sqrt{20}), a = (\sqrt{5}-1)^2+(\sqrt{5}+1)^2$$

نعلم أن $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$

	N	Z	D	Q	R
$-7,9$	×	×	$-7,9$	$-7,9$	$-7,9$
$-\sqrt{169}$	×	$-\sqrt{169}$	$-\sqrt{169}$	$-\sqrt{169}$	$-\sqrt{169}$
$\sqrt{6}+5$	×	×	×	×	$\sqrt{6}+5$
$\frac{357}{17}$	$\frac{357}{17}$	$\frac{357}{17}$	$\frac{357}{17}$	$\frac{357}{17}$	$\frac{357}{17}$
$\frac{\pi}{3}$	×	×	×	×	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{81}}{12}$	×	×	$\frac{\sqrt{81}}{12}$	$\frac{\sqrt{81}}{12}$	$\frac{\sqrt{81}}{12}$

<u>حل التمرين 2:</u>

$$\sqrt{15}x < \sqrt{15}y, \frac{1}{\pi}x < \frac{1}{\pi}y, -7x > -7y, x-7 < y-7$$

$$\pi\sqrt{2}x < \pi\sqrt{2}y, -\frac{3}{5}x+2 > -\frac{3}{5}y+2, -2x-9 > -2y-9$$

<u>حل التمرين 3:</u>

نعلم أن إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$ وإذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$

$$=0 ، \left|-\frac{7}{4}\right| = -\left(\frac{-7}{4}\right) = \frac{7}{4} ، |-9| = -(-9) = 9$$

$$3-\sqrt{3}| = \sqrt{23}-\sqrt{3} \quad ، \quad |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$$

$$2-\sqrt{5})^2 = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$$

$$4-\pi| = -(3,14-\pi) = -3,14+\pi$$

حل التمرين 4 :

لدينا (1) ...... $3 \le x \le 7$ ، (2) ...... $2 \le y \le 5$

- بجمع المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد : $5 \le x + y \le 12$.
- نضرب أطراف المتباينة (2) في العدد (−1) نجد : $-5 < -y < -2$ ....(3).
- ثم بجمع المتباينتين (1) و(3) طرفا لطرف نجد: $-2 \le x - y \le 5$.
- نضرب أطراف المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد : $6 \le xy \le 35$ (كل الأطراف موجبة).
- نقلب أطراف المتباينة (2) نجد : $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ ......(4) (لأن كل الأطراف موجبة تماما).
- نضرب أطراف المتباينتين (1) و(4) طرفا لطرف نجد : $\frac{3}{5} < \frac{x}{y} < \frac{7}{2}$ أي

$$0,6 < \frac{x}{y} < 3,5$$

- بما أن كل أطراف المتباينتين (1) و(2) موجبة يمكن تربيع كل الأطراف نجد : $9 \le x^2 \le 49$....(5) ، $4 \le y^2 \le 25$ .....(6).
- نضرب أطراف المتباينة (6) في العدد (−1) نجد : $-25 \le -y^2 \le -4$ ...(7)
- نجمع أطراف المتباينتين (5) و(7) طرفا لطرف نجد: $-16 \le x^2 - y^2 \le 45$

حل التمرين 5:

نضرب بسط ومقام الكسر A في العبارة المرافقة للعدد $5-\sqrt{3}$ وهي $5+\sqrt{3}$

$$A = \frac{-2}{5-\sqrt{3}} \times \frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{-2(5+\sqrt{3})}{25-3} = \frac{-2(5+\sqrt{3})}{22} = \frac{-5-\sqrt{3}}{11}$$

نضرب بسط ومقام الكسر B في العبارة المرافقة للمقام $3+\sqrt{3}$ وهي $3-\sqrt{3}$

$$B = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$= \frac{-5-\sqrt{3}}{11} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{-10-2\sqrt{3}+11\sqrt{3}-11}{22} = \frac{-21+9\sqrt{3}}{22}$$

حل التمرين 6:

A و B مجموعتان تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعـــة $A \cap B$ وهي مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين A و B، اتحاد المجمـــوعتين A و B هو المجموعة $A \cup B$ وهي مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة (دون تكرار) أي العناصر التي تنتمي إلى A أو B.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
[2 ، 6]	[5 ، 10]	[5 ، 6]	[2،10]
]$-\infty$ ،0[	[-5 ،$+\infty$[	[-5 ،0[	]$-\infty$ $+\infty$[
]-9 ، -1]	[-3 ، -1[	[-3 ،-1[	]-9 ،-1]

حل التمرين 7 :

1) $|x-4| = 7$: تعبر عن المسافة العدد x و 4 تساوي 7.

2) $|x| = \frac{8}{5}$: تعبر عن المسافة العدد الحقيقي x والصفر تساوي $\frac{8}{5}$.

3) $|x+y| = 3$: تعبر عن المسافة بين العدد x و $(-y)$ تساوي 3.

4) $|y+5| = 1,4$: تعبر عن المسافة بين العدد الحقيقي y و (-5) تساوي 1,4.

5) $|1,5 - x| = 1$: تعبر عن المسافة بين العدد 1,5 و x تساوي 1.

حل التمرين 8 :

* مقلوب العدد $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ هو $\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{4}+\sqrt{3}$$

* مقلوب العدد $\sqrt{2006}-\sqrt{2005}$ هو $\frac{1}{\sqrt{2006}-\sqrt{2005}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2006}-\sqrt{2005}}=\frac{1}{\sqrt{2006}-\sqrt{2005}}\times\frac{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}=\sqrt{2006}+\sqrt{2005}$$

• مقلوب العدد $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ هو $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

حل التمرين 9:

• $|2x-5|\leq 9$ معناه : $-9\leq 2x-5\leq 9$ أي $5-9\leq 2x\leq 9+5$

ومنه $-4\leq 2x\leq 14$ نضرب أطراف هذه المتباينة في العدد $\frac{1}{2}$ نجد :

$-2\leq x\leq 7$ ومنه $x\in[-2\ ,7]$

• $|1-5x|<4$ معناه : $-4<1-5x<4$ أي $-5<-5x<3$

بضرب أطراف هذه المتباينة الأخيرة في العدد $-\frac{1}{5}$ نجد :

$-\frac{3}{5}<x<1$ إذن $x\in\left]-\frac{3}{5}\ ,1\right[$.

• $\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{17}{8}$ معناه : $-\frac{17}{8}\leq\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\leq\frac{17}{8}$

أي $\frac{3}{4}-\frac{17}{8}\leq\frac{1}{2}x\leq\frac{17}{8}+\frac{3}{4}$ ومنه $\frac{-11}{8}\leq\frac{1}{2}x\leq\frac{23}{8}$

نضرب أطراف هذه المتباينة الأخيرة العدد 2 نجد :

$\frac{-22}{8}\leq x\leq\frac{46}{8}$ أي $\frac{-11}{4}\leq x\leq\frac{23}{4}$ ومنه $x\in\left[\frac{-11}{4},\frac{23}{4}\right]$

حل التمرين 10: للمقارنة العددين a و b نحسب الفرق a-b:

1) $$a-b=\frac{1}{4-\sqrt{2}}-\frac{1}{4+\sqrt{2}}=\frac{(4+\sqrt{2})-(4-\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}=\frac{4+\sqrt{2}-4+\sqrt{2}}{16-2}$$

إذن $a-b=\frac{\sqrt{2}}{7}$ ومنه a-b>0 أي a>b.

2) $a-b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)-4}{2(1+\sqrt{5})}=\frac{5-1-4}{2(1+\sqrt{5})}=0$

بما أن $a-b=0$ فإن $a = b$

حل التمرين 11:

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b (أي (PGCD(a,b) نحلل كلا من العددين a وb إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب جداء العوامل المشتركة في تحليل a و b بحيث نأخذ كل عامل مرة واحدة وبأصغر أس.

1)

36	2	81	3	24	2	50	2
18	2	27	3	12	2	25	5
9	3	9	3	6	2	5	5
3	3	3	3	3	3	1	
1		1		1			

ومنه $a = 36\times81 = (2^2\times3^2)\times3^4 = 2^2\times3^6$

$b = 24\times50 = (2^3\times3)\times(2\times5^2) = (2\times5^2) = 2^4\times3\times5^2$

$PGCD(a,b) = PGCD(2^2\times3^6 \text{ ، } 2^4\times3\times5^2) = 2^2\times3 = 12$

2) بنفس الطريقة السابقة نجد : $a = 2^2\times3\times11$ ، $b = 2\times3^3\times7^2$

$PGDC(a,b)\ (2^2\times3\times11 \text{ ، } 2\times3^3\times7^2) = 2\times3 = 6$

حل التمرين 12:

1) $|x+4| = 3$ ، 2) $|y-1,5|\leq10$ ، 3) $|x-y| \geq 8,5$

4) $|y-2005| \leq 2006$ ، 5) $|-x+4| = 27$ أو $|x-4| = 27$

حل التمرين 13:

1) نبحث أولا عن الأعداد الحقيقية a التي تحقق : $|a-2005|<0,5$

معناه : $-0,5<a-2005<0,5$ ، $2004,5<a < 2005,5$

أي $]2004,5 \text{ ، } 2005,5[\ni a$ نلاحظ أن العدد الطبيعي الوحيد الذي ينتمي إلى هذا المجال هو $a = 2005$

(2

$$\frac{4+\pi}{4} - \frac{3+\pi}{3} = \frac{3(4+\pi)-4(3+\pi)}{12} = \frac{12+3\pi-12-4\pi}{12} = \frac{-\pi}{12}$$

بما أن $\frac{-\pi}{12} < 0$ فإن $\frac{4+\pi}{4} < \frac{3+\pi}{3}$

* نقارن بين مربعي العددين $\sqrt{3}+3$ و $\sqrt{12+5\sqrt{3}}$ (لأنهما موجبان)

$$\left(\sqrt{12+5\sqrt{3}}\right)^2 - (\sqrt{3}+3)^2 = 12+5\sqrt{3} - (3+9+6\sqrt{3})$$
$$= 12+5\sqrt{3}-12-6\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

بما أن $-\sqrt{3} < 0$ فإن $a^2-b^2<0$ أي $a<b$ إذن $\sqrt{12+5\sqrt{3}} < \sqrt{3}+3$

حل التمرين 14: لدينا $x=-3$ ، $y=17$ ، $Z=-11$

1) $|x|+|y| = |-3|+|17| = 3+17 = 20$ ، $|x+y| = |-3+17| = |+14| = 14$

2) $|x|+|y|+|z| = |-3|+|17|+|-11| = 3+17+11 = 31$ ،

$|x+y+z| = |-3+17-11| = |+3| = 3$

3) $|y+z| - x = |17-11| - (-3) = |6|+3 = 6+3 = 9$

$z - |x+y-z| + y = -11 + |-3+17+11| + 17 = -11+25+17 = 31$

حل التمرين 15:

1) نعلم أن $\frac{p+8}{p} = \frac{p}{p} + \frac{8}{p} = 1 + \frac{8}{p}$ حتى يكون العدد $\frac{p+8}{p}$ عددا طبيعيا يجب أن يكون $\frac{8}{p} \in N$ أي 8 يقبل القسمة على p.

ومنه $p \in \{1 \text{، } 2 \text{، } 4 \text{، } 8\}$

2) نعلم أن $\frac{a+7}{a-1} = \frac{a-1+8}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} + \frac{8}{a-1} = 1 + \frac{8}{a-1}$

حتى يكون العدد $\frac{a+7}{a-1}$ طبيعيا يجب أن يكون $\frac{8}{a-1} \in N$ أي 8 يقبل القسمة على a-1 ونعلم أن قواسم 8 هي 1،2،4،8.

* a-1=1 معناه : a=1+1=2 ، a-1=2 معناه : a=2+1=3
* a-1=4 معناه : a=4+1=5 ، a-1=8 معناه : a=8+1=9

إذن قيم a المطلوبة هي : 8،4،3،2.

حل التمرين 16:

1) (1) $2<x<7$.... ، (2) ..... $3<y<9$.

بما أن كل الأطراف موجبة نضرب أطراف المتباينتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد : $6<xy<63$ ومنه $xy\in\,]6 ، 63[$

2) (1) $-3<x<-1$..... ، (2) ..... $10<y<19$.

نضرب أطراف المتباينة (1) في العدد (−1) نجد : $1<-x<3$ ....(3)

نضرب أطراف المتباينتين (2) و(3) طرفا لطرف نجد : $10<-xy<57$ ....(4)، نضرب أطراف المتباينة (4) في العدد (−1) نجد : $-57<xy<-10$ ومنه $xy\in\,]-57 ، -10[$

3) (1) $-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2}$......(1) ، $-1-\sqrt{2}<y<-\sqrt{2}$.......(2)

نضرب أطراف المتباينتين (1) و(2) في العدد (−1) نجد :

$\sqrt{2}<-x<\sqrt{3}$.....(3) ، $\sqrt{2}<-y<\sqrt{2}+1$.....(4)

نضرب أطراف المتباينتين (3) و(4) طرفا لطرف نجد :

$\sqrt{2}\times\sqrt{2}<xy<\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ أي $2<xy<\sqrt{6}+\sqrt{3}$

حل التمرين 17:

$$\sqrt{6}\times\sqrt{48}=\sqrt{2\times3}\times\sqrt{2^4\times3}=\sqrt{2\times3\times2^4\times3}=\sqrt{2\times2^4\times3^2}$$
$$=2^2\times3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{75}{27}}=\sqrt{\frac{3\times 5^2}{3^3}}=\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{3^2}}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{0,0075}=\sqrt{75\times 10^{-4}}=\sqrt{3\times 5^2\times 10^{-4}}=5\times 10\sqrt{3}=0,05\sqrt{3}$$

حل التمرين 18:

$$\sqrt{a}=\sqrt{2^6\times 3^2\times 5^4}=\sqrt{\left(2^3\times 3\times 5^2\right)^2}=2^3\times 3\times 5$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{5^4\times 11^6\times 13^2}=\sqrt{\left(5^2\times 11^3\times 13\right)^2}=5^2\times 11^3\times 13$$

حل التمرين 19:

$$a=(\sqrt{5}-1)^2+(\sqrt{5}+1)^2=5+1-2\sqrt{5}+5+1+2\sqrt{5}=12$$

$$b=(\sqrt{120}-\sqrt{20})(\sqrt{120}+\sqrt{20})=(\sqrt{120})^2-(\sqrt{20})^2=120-20=100$$

2 العبارات الجبرية ـ الشكل النموذجي

معارف :

العبارة الجبرية : نسمي عبارة جبرية كل عبارة تحتوي على متغير أو متغيرين أو أكثر (....b,a,y,x) بحيث إذا عوضنا هذه الحروف بأعداد تصبح قيمة عددية .

تطبيق1 : $A(x)$ عبارة جبرية حيث $A(x)=x^3-x$

احسب العبارة الجبرية من أجل $x=-1$ ثم $x=3$

الحل :

$A(-1)=(-1)^3-(-1)=-1+1=0$ ، $A(3)=3^3-3=24$

✓ **قواعد الحساب الجبري في R:**

تعريف : • نشر جداء يعني كتابته على شكل مجموع أو فرق أعداد.

• تحليل مجموع يعني كتابته على شكل جداء.

* تبسيط مجموع يعني كتابته على أبسط شكل ممكن وبأقل عدد ممكن من الحدود، لتكن k,d,c,b,a أعداد حقيقية .

التحليل (من اليسار إلى اليمين)	النشر (من اليسار إلى اليمين)
Ka+kb = k(a+b)	K (a+b) = ka+kb
Ka-kb = k (a-b)	K (a-b) = ka- kb
ac+ad+bc+bd = (a+b)(c+d)	(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd

ملاحظة : * A و B عددان حقيقيان إذا كان AB=0 فإن A=0 أو B=0

* إذا كان A^n فإن A=0، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

بعض الجداءات الشهيرة :

التحليل (من اليسار إلى اليمين)	النشر (من اليسار إلى اليمين)
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

تطبيق2: $x^2-9=(x-3)(x+3)$ ، $x^2+5x=x(x+5)$

✓ **نشر جداء من الشكل : (ax+d) (cx+d)**

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

تطبيق3:

اختبر معلوماتك : بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان).

1) $a^2+5=(a+5)(a-5)$

2) كل الجمل صحيحة : $(2a+b)^2=4a^2+b^2$ ، $x^2=x$ ، $x-x^2=x(1+x)$

3) x و y عددان حقيقيان موجبان تماما : $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

4) من أجل كل عدد حقيقي x: $(2x+3)^2=2x^2+9+12x$

5) من اجل كل عددين حقيقيين x و y : $\frac{7x+8}{7y+8}=\frac{7x}{7y}$

6) من اجل كل عدد حقيقي a: $(a-2)^3=a-6a^2+12a-8$

7) من أجل كل عدد حقيقي x: $7x^2-5x+9=(4x-1)(3x-9)$

8) من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$

9) من اجل عددين حقيقيين a و b : $1+4a^2b^2=(1+2ab)(1-2ab)$

10) من اجل كل عدد حقيقي x: $7x^2-14=7(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

التمارين

التمرين 1: انشر ثم بسط العبارات الجبرية التالية :

$(1-4x)^2$ ، $(5+\frac{1}{5}x)^2$ ، $(x^2+y^2)^2$ ، $(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$

التمرين 2: حلل كلا من العبارات التالية :

$x^2+14x+49$ ، $(3-x)^2-x+3$ ، $4(x+2)(x+1)-(x+2)$ ،

$(1+3x)^2-(1-x)^2$ ، $9x^2+16-24x$ ، x^2-y^2+x-y

التمرين 3: عيّن مجموعة تعريف كلا من العبارات التالية :

$$A=\frac{x-1}{x+1}, B=\frac{3}{x^2-1}, C=\frac{-7}{(x+4)^2}, D=\frac{-x+4}{4x^2+4x+1}, F=\sqrt{2x-8}$$

التمرين4:

c,b,a أعداد حقيقية برهن صحة كل مساواة .

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

التمرين 5:

A عبارة جبرية حيث $A=\dfrac{4x+5}{x-2}$

1) عيّن E مجموعة تعريف العبارة A.

2) عين العددين الحقيقيين α و B بحيث $A=\alpha+\dfrac{B}{x-2}, x\in E$

3) احسب العدد A من أجل $x=4$

التمرين 6:

نضع $f(x)=(x-5)^2-(2x-10)(x+1)$

1) انشر ثم بسط العبارة $f(x)$.

2) حلّل العبارة $f(x)$.

3) برهن أن $f(-7)=f(5)$ وماذا تستنتج ؟

التمرين 7:

عين العددين الحقيقيين α و B بحيث تكون كل مساواة صحيحة من أجل عدد حقيقي x

1) $(x-2)(\alpha x+B)=2x^2-x-6$

2) $(-3x+2)(\alpha x+B)=3x^2-20x+12$

التمرين 8:

برهن باستخدام مثال مضاد أن كل مساواة مما يلي غير صحيحة (x,b,a أعداد حقيقية).

1) $\dfrac{2x}{a+b}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}$ ، 2) $\dfrac{xz}{y}=\dfrac{x}{y}\times\dfrac{z}{y}$ ، 3) $(a-b)^3=a^3-b^3$

التمرين 9 : انشر ثم بسط العبارات التالية :

$A=(3+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})$ ، $B=(2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})$

$C=(1+\sqrt{3})^3-1-\sqrt{3}$ ، $D=(2+\sqrt{3})^3-(2-\sqrt{3})^3$

التمرين 10: نضع : $x+y=3$ ، $x-y=-2$

دون حساب العددين x و y احسب الأعداد الحقيقية D,C,B,A.

$A=x-1-(y-2)$ ، $B=x-(1-y)-2$

$C=x^2-y^2-(y+x)$ ، $D=3x+y-3$

التمرين 11:

A عبارة جبرية حيث : $A=4x^2-(x-y)^2$ و x و y عددان حقيقيان .

1) حلل العبارة الجبرية A.

2) احسب العدد الحقيقي A من أجل $x=-\sqrt{2}$ و $y=-1$

3) برهن أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y فإن العدد $(A-4x^2)$ سالب.

4) نضع $x-y=\alpha$ عبر عن A بدلالة α و y.

الحلول

حل التمرين 1:

$$(1-4x)^2=1^2-2\times1\times4x+(4x)^2=1-8x+16x^2$$

$$(5+\frac{1}{5}x)^2=5^2+2\times5\times\frac{1}{5}x+(\frac{1}{5}x)^2=25+2x+\frac{1}{25}x^2$$

$$(x^2+y^2)^2=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})=x^2-(\frac{1}{x})^2=x^2-\frac{1}{x^2}$$

حل التمرين 2:

$$x^2+14x+49=x^2+2\times x\times7+7^2=(x+7)^2$$

$$(3-x)^2-x+3=(3-x)^2+(3-x)=(3-x)[(3-x)+1]$$

$$=(3-x)(-x+4)$$

$$4(x+2)(x+1)-(x+2)=(x+2)[4(x+1)-1]=(x+2)(4x+3)$$

$$(1+3x)^2-(1-x)^2=[(1+3x)-(1-x)][(1+3x)+(1-x)]$$
$$=(1+3x-1+x)(1+3x+1-x)$$
$$=(4x)(2x+2)=8x(x+1)$$
$$9x^2+16-24x=(3x)^2-2\times 3x\times 4+4^2=(3x-4)^2$$
$$(x^2-y^2)+(x-y)=(x-y)(x+y)+(x-y)=(x-y)[x+y+1]$$

<u>حل التمرين 3:</u>

نعلم أنه يكون الكسر $\frac{x}{y}$ معرفا إذا كان المقام لا يساوي 0 أي $y\neq 0$.

(لأن $\frac{x}{0}$ عدد غير معرف مهما كان العدد الحقيقي x، بينما $\frac{0}{y}=0$ مهما كان العدد الحقيقي y غير المعدوم).

1) $A=\frac{x-1}{x+1}$ لإيجاد مجموعة تعريف الكسر للسهولة نبحث عن القيم التي تعدم المقام.

أي $x+1=0$ معناه $x=-1$. إذن العبارة A معرفة على المجموعة

$$E=R-\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

2) $B=\frac{3}{x^2-1}$ ، $x^2-1=0$ معناه : $(x-1)(x+1)=0$

أي $x+1=0$ أو $x-1=0$ ومنه $x=-1$ أو $x=1$

إذن العبارة B معرفة على المجموعة:

$$E=R-\{-1،1\}=]-\infty،-1[\cup]-1،1[\cup]1،+\infty[$$

3) $C=\frac{-7}{(x+4)^2}$ ، $(x+4)^2=0$ معناه : $x+4=0$ أي $x=-4$.

إذن العبارة C معرفة على المجموعة :

$$E=R-\{-4\}=]-\infty،-4[\cup]-4،+\infty[$$

4) $D=\dfrac{-x+4}{4x^2+4x+1}$ $4x^2+4x+1=0$ معناه : $(2x+1)^2=0$

أي $2x+1=0$ ومنه $x=\dfrac{-1}{2}$

إذن العبارة D معرفة على المجموعة :

$$E=R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\left]-\infty ، \frac{-1}{2}\right[\cup\left]\frac{-1}{2} ، +\infty\right[$$

5) $F=\sqrt{2x-8}$ $2x-8\geq 0$ معناه : $2x\geq 8$ أي $x\geq 4$

إذن العبارة F معرفة على مجموعة : $E=[4 ، +\infty[$

حل التمرين 4:

1) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=ab-ac+bc-ba+ca-bc$

$=(ab-ba)+(-ac+ac)+(bc-bc)=0$

2)

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b+(a-b)(bc-ba-c^2+ca)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b+abc-a^2b-ac^2+a^2c$

$-b^2c+b^2a+bc^2-bca=0$

التمرين 5:

1) $A=\dfrac{4x+5}{x-2}$ $x-2=0$ معناه : $x=2$

العبارة A معرفة على المجموعة

$E=R-\{2\}=]-\infty ، 2[\cup]2 ، +\infty[$

2) $A=\alpha+\dfrac{B}{x-2}=\dfrac{\alpha(x-2)+B}{x-2}=\dfrac{\alpha x-2\alpha+B}{x-2}$

نعلم أنه إذا كان $\dfrac{F}{c}=\dfrac{K}{c}$ فإن F= K

$$\begin{cases}\alpha=4\\ B=5+2\times4=13\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\alpha=4\\ B=5+2\alpha\end{cases}$$ معناه $$\begin{cases}\alpha=4\\ -2\alpha+B=5\end{cases}$$

ومنه $A=4+\dfrac{13}{x-2}$

3) حساب العدد A من أجل $x=4$: $A=4+\dfrac{13}{2}=\dfrac{21}{2}$

حل التمرين 6:

1)
$$\begin{aligned}f(x)&=(x-5)^2-(2x-10)(x+1)\\&=x^2-10x+25-(2x^2+2x-10x-10)\\&=x^2-10x+25-2x^2-2x+10x+10=-x^2-2x+35\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}f(x)&=(x-5)^2-2(x-5)(x+1)=(x-5)[(x-5)-2(x+1)]\\&=(x-5)(x-5-2x-2)=(x-5)(-x-7)\end{aligned}$$

3) $f(-7)=(-7-5)(7-7)=0$ ، $f(5)=(5-5)(-5-7)=0$

إذن $f(-7)=f(5)=0$ نستنتج أن العددين 5، -7 هما حـلا المعاد

$f(x)=0$

حل التمرين 7:

نعلم أنه يتساوى كثيري حدود لنفس المتغير الحقيقي x إذا كانت لهمـا نف الدرجة، ومعاملات الحدود المتشابهة تكون متساوية .

1) $(x-2)(\alpha x+B)=2x^2-x-6$ معناه:

$$\alpha x^2+Bx-2\alpha x-2B=2x^2-x-6$$

أي $\alpha x^2+(B-2\alpha)x-2B=2x^2-x-6$ حسب نظرية تساوي كثيري

$$\begin{cases}\alpha=2\\ B-2\alpha=-1\\ -2B=-6\end{cases}$$ معناه: $$\begin{cases}\alpha=2\\ B=2\alpha-1\\ B=3\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\alpha=2\\ B=3\end{cases}$$

إذن $(x-2)(2x+3)=2x^2-x-6$

2) $(-3x+2)(\alpha x+B)=3x^2-20x+12$ معناه:

$$-3\alpha x^2-3Bx+2\alpha x+2B=3x^2-20x+12$$

أي $-3\alpha x^2+(2\alpha-3B)x+2B=3x^2-20x+12$ حسب نظرية تساوي كثيري حدود.

$\begin{cases}-3\alpha=3\\2\alpha-3B=-20\\2B=12\end{cases}$ معناه : $\begin{cases}\alpha=-1\\2\alpha=3B-20\\B=6\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\alpha=-1\\B=6\end{cases}$

إذن $(-3x+2)(-x+6)=3x^2-20x+12$

حل التمرين 8:

1) نأخذ $x=2$ ، $a=b=1$ نعوض هذه القيم في المساواة: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=\dfrac{2x}{a+b}$

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{2}{1}+\frac{2}{1}=4 \quad \text{و} \quad \frac{2\times2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

بما أن الطرفين غير متساويين فإن المساواة غير صحيحة.

2) نأخذ $x=4$ ، $y=-1$ ، $z=2$ نعوض هذه القيم في المساواة:

$$\frac{x}{y}\times\frac{z}{y}=\frac{xz}{y}$$

$$\frac{x}{y}\times\frac{z}{y}=\frac{4}{-1}\times\frac{2}{-1}=+8 \quad \text{و} \quad \frac{xz}{y}=\frac{4\times2}{-1}=-8$$

بما أن الطرفين غير متساويين فإن المساواة غير صحيحة .

3) نأخذ $a=2$ ، $b=1$ نعوض هذه القيم في المساواة:

$$(a-b)^3=a^3-b^3$$

$$(a-b)^3=(2-1)^3=1 \quad \text{و} \quad a^3-b^3=2^3-1=7$$

بما أن الطرفين غير متساويين فإن المساواة غير صحيحة.

حل التمرين 9:

$= (3+\sqrt{7})(2-\sqrt{7}) = 6 - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 7 = -1 - \sqrt{7}$

$= (2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 20 - 6 = 14$

$(1+\sqrt{3})^3 - 1 - \sqrt{3} = 1 + 3\times 1^2 \times \sqrt{3} + 3\times(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 - 1 - \sqrt{3}$

$= 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = 9 + 5\sqrt{3}$

$= (2+\sqrt{3})^3 - (2-\sqrt{3})^3$

$= (8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3}) - (8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3})$

$= 26 + 15\sqrt{3} - 26 + 15\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

حل التمرين 10: لدينا $x+y=3$ ، $x-y=-2$

نكتب كل الأعداد A،B،C،D بدلالة $x+y$ أو $x-y$ لتسهيل الحساب.

$= x - 1 - (y-2) = x - 1 - y + 2 = (x-y) + 1 = -2 + 1 = -1$

$= x - (1-y) - 2 = x - 1 + y - 2 = (x+y) - 3 = 3 - 3 = 0$

$= x^2 - y^2 - (y+x) = (x-y)(x+y) - (x+y) = (-2)\times 3 - 3$

$= -6 - 3 = -9$

$= 3x + y - 3 = 2x + 2y + x - y - 3 = 2(x+y) + (x-y) - 3$

$= 2\times 3 - 2 - 3 = 1$

حل التمرين 11:

1) $A = [2x - (x-y)][2x + (x-y)] = (x+y)(3x-y)$

2) حساب العدد A من أجل $x = -\sqrt{2}$ و $y = -1$

$= (-\sqrt{2} - 1)(-3\sqrt{2} + 1) = 6 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 1 = 5 + 2\sqrt{2}$

$-4x^2 = 4x^2 - (x-y)^2 - 4x^2 = -(x-y)^2$

3) نعلم أن مربع أي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب أو معدوم أي :

$(x-y) \geq 0$ نضرب طرفي هذه المتباينة في العدد (-1) أي: $-(x-y)^2 \leq 0$

إذن $A - 4x^2 \leq 0$

4) $x - y = \alpha$ معناه: $x = y + \alpha$.

$A = 4x^2 - (x-y)^2 = 4(y+\alpha)^2 - \alpha^2$

3 عموميات على الدوال العددية-التمثيل البياني لدالة

معارف:

تعريف الدالة: نسمي دالة f، كل علاقة ترفق بكل عنصر x من المجموعة E، العدد الذي نرمز إليه $f(x)$ حيث x عنصر يتغير في المجموعة E.

العدد $f(x)$ يسمى صورة x بواسطة الدالة f.

إذا كان x يحقق $f(x) = y$ فإن x يسمى سابقة العدد y.

E تسمى مجموعة تعريف الدالة f.

ونكتب :

$$f : E \to R$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

تطبيق 1: f دالة عددية معرفة على مجال $[-3 ، 5]$ كما يلي :

$f(x) = x^2 - 2x$

1) عيّن صورة كل من العددين 2،4 بواسطة الدالة f.

2) عيّن سابقة العدد 0 بواسطة الدالة f.

الحل : 1) $f(4) = 4^2 - 2\times 4 = 8$ ، $f(2) = 2^2 - 2\times 2 = 4 - 4 = 0$

2) إيجاد سابقة الصفر يعني حل المعادلة $f(x) = 0$ أي :

$x^2 - 2x = 0$ معناه: $x(x-2) = 0$ ومنه: $x = 2$ أو $x = 0$

إذن العدد0 له سابقتان هما 0،2 .

✓ **التمثيل البياني لدالة :**

المستوي منسوب إلى معلم $(0, \vec{I}, \vec{J})$ f دالة معرفة على مجموعة E.

تعريف : التمثيل البياني (c) للدالة f في المعلم $(0، \vec{I}, \vec{J})$ هــو مجموعـ

النقط $M(x,y)$ من المستوي حيث $x \in E$ و $y = f(x)$

المجموعة (c) تسمى أيضا المنحني الممثل للدالة f.

✓ جدول قيم دالة :

جدول قيم الدالة تا هو جدول يحتوي على سطرين وعدة أعمدة بحيث نعط

قيم معلومة للعدد x من مجموعة تعريف الدالة f. ونبحث عـن صـور

$.f(x)$

تطبيق2: f دالة معرفة على المجال [4، 5-] حيث $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$

عين جدول لبعض قيم الدالة f.

الحل :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	13	$\frac{37}{4}$	6	$\frac{13}{14}$	1	$\frac{-3}{4}$	-2	$\frac{-11}{4}$

ملاحظة :

- حساب صورة العدد a من مجموعة تعريف الدالة يعني تعويض x بالعدد a في الدالة f أي حساب : $f(a)$.
- يجب التمييز بين الرمزين f و $f(x)$ باعتبار $f(x)$ عـددا و f الدالة التي ترفق بالعدد x العدد $f(x)$.
- حساب سابقة العدد b يعني حل المعادلة $f(x) = b$ (أي حساب x).

تطبيق3: نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f : [-2، 3] \to R$$

$$x \mapsto x^3 - x$$

1) احسب صور الأعداد $(-1,5)$، 0، $\sqrt{2}$ بواسطة الدالة f.

2) عيّن سوابق العدد 0.

الحل:

1) $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ ، $f(0)=0$ ،

$$f(-1,5)=(-1,5)^3-(-1,5)=-1,875$$

2) $f(x)=0$ معناه: $x^3-x=0$ أي $x(x^2-1)=0$ ومنه

$$x(x-1)(x+1)=0$$

إذن $x=0$ أو $x=1$ أو $x=-1$ نلاحظ أن الحلول 1-،1،0 تنتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f. إذن سوابق الصفر هي 1-،1،0.

✓ **إيجاد مجموعة تعريف دالة :**

تعين مجموعة تعريف دالة f يعني إيجاد الأعداد الحقيقية التي لها صور بواسطة الدالة f.

تطبيق 4: عيّن مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{x-5}{2x+3}$.

الحل:

تكون الدالة f معرفة إذا كان المقام لا يساوي 0.

$2x+3=0$ معناه: $2x=-3$ أي $x=\dfrac{-3}{2}$

إذن الدالة f معرفة على المجموعة

$$E=R-\left\{-\frac{3}{2}\right\}=\left]-\infty,\frac{-3}{2}\right[\cup\left]\frac{-3}{2},+\infty\right[$$

✓ **إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى :**

ملاحظة : ليكن $f(x)=ax+b$ ، a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$.

إشارة $f(x)$ هي مثل إشارة a من أجل $x \geq \frac{-b}{a}$، وعكس إشارة a من أجل $x \leq \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

تطبيق 5: عين مجموعة تعريف الدالة العددية f حيث $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

الحل:

تكون الدالة f معرفة إذا كان $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ و $x+2 \neq 0$

لتعين مجموعة التعريف تدرس إشارة $x-1$ وإشارة $x+2$ ثم إشارة الكسر

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$	$+$	‖	//////	0	$+$

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $E =]-\infty ، -2[\cup [1 ، +\infty[$

اختبر معلوماتك : بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1) العدد (-4) هو صورة 2 بواسطة الدالة f حيث $f(x)=2x-9$

2) R هي مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x}$.

3) $(+4)$ هو سابقة العدد0 بواسطة الدالة h حيث $h(x)=(x-4)^2$

4) مساحة القرص هي دالة لنصف قطره.

5) توجد جملة واحدة خاطئة: $\frac{1}{\sqrt{2}} \in R$ ، $\sqrt{-16} \in R$ ، $(\sqrt{7}+\sqrt{11}) \in R$

6) كل عنصر x من مجوعة تعريف الدالة f له عدة صور وفق الدالة f

7) $]-\infty ، -2]$ هي مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\sqrt{-x-2}$.

8) يمكن أن يكون لعدد عدة سوابق وفق الدالة f.

التمارين

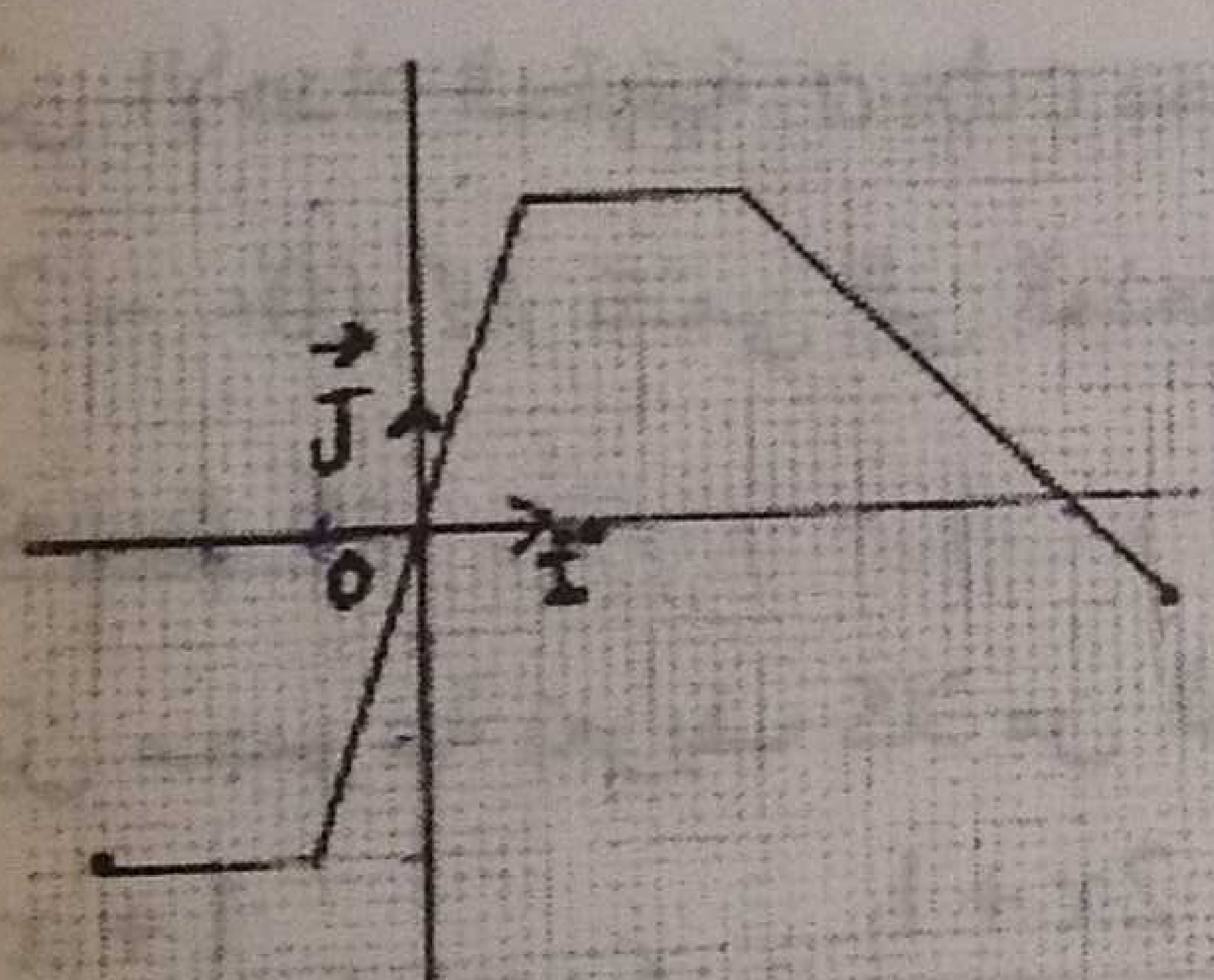
التمرين1:

f دالة عددية معرفة على المجال $[-5 ، 2]$ كما يلي: $f(x)=3x-1$

1) عيّن صور الأعداد -1، $-\pi$، $1,7$ وفق الدالة f.

2) عيّن سوابق الأعداد 0، -1، 8 وفق الدالة f.

التمرين 2:



الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x معرفة بالتمثيل البياني التالي (c).

* عيّن مجموعة تعريف الدالة f.
* أكمل الجدول التالي وذلك بتعيين فواصل وتراتيب النقط إن أمكن.

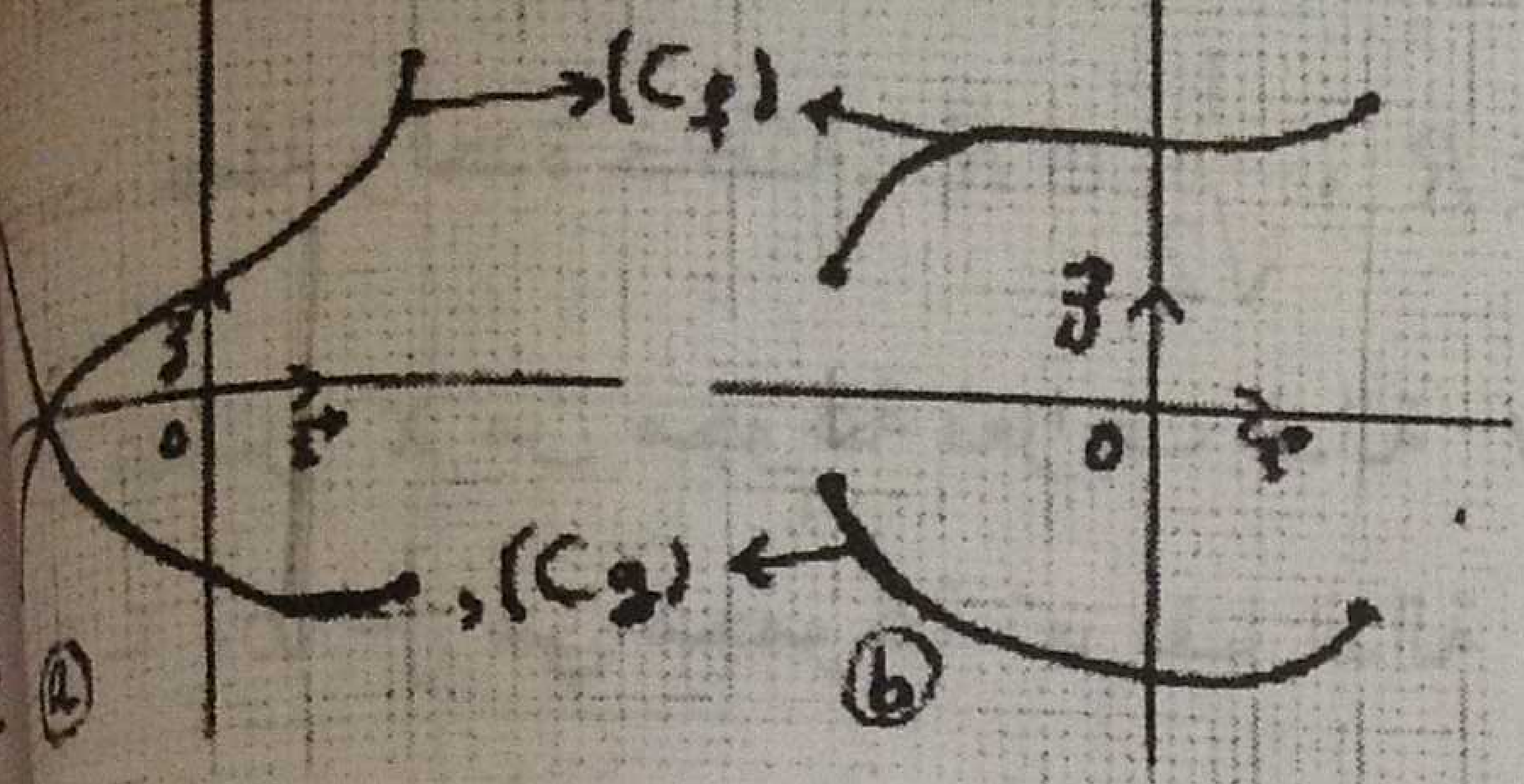
x	-1	0	4	....	....	6	3	-4
$f(x)$	.....	.....	.....	4	-1	....	.....	....

التمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=x^2+3x-1$.

1) احسب صور الأعداد 0، $\sqrt{2}$، a، $\frac{a}{2}$، $2x-1$، x و a عددان حقيقيان

2) عيّن سوابق (إن وجدت) العدد -1، وفق الدالة f.



نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-3;2]$ نرمز بـ (C_f) ، (C_g) إلى تمثيليهما البيانيين على الترتيب.

1) عيّن الأعداد الحقيقية x (إن وجدت) التي تحقق $f(x)=g(x)$ في كل

2) عيّن الأعداد الحقيقية x التي من أجلها يكون $f(x)\geq g(x)$.

التمرين5:

f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على R كما يلي:

$f(x)=ax^2+bx+c$.

و(C) التمثيل البياني للدالة f .

عيّن الأعداد الحقيقية a،b،c بحيث تكون النقط $M_1(1،0)$ ، $M_2(-1،2)$ ، $M_3(0،-2)$ تنتمي إلى المنحنى (C).

التمرين 6:

عيّن مجموعة تعريف كلا من الدوال المعرفة كما يلي:

$f:x\mapsto \dfrac{1+x}{5-3x}$ ، $g:x\mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-16}$ ، $h:x\mapsto \dfrac{-3}{x^2+8}$،

$k:x\mapsto \sqrt{4-5x}$ ، $p:x\mapsto \sqrt{(2-x)(x+3)}$

التمرين7:

f دالة عددية حيث $f(x)=\dfrac{5}{3}x-5$ و(c) تمثيلها البياني.

1) بين أن المنحني (c) هو مستقيم .

2) إذا كانت f معرفة على المجال $[0،14]$. عين النقط من (c) فواصلها وتراتيبها أعداد طبيعية .

التمرين8:

f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على R كما يلي: $f(x)=5\left|x-\frac{2}{5}\right|$

1) عبّر عن العدد $f(x)$ باستعمال المسافة .

2) احسب صور الأعداد -2، $-\sqrt{5}$، $1,4$ وفق الدالة f

3) هل توجد سوابق للعدد 3 وفق الدالة تا ؟

4) عبّر عن $f(x)$ بدون استعمال رمز القمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى (c) الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0، \vec{I}، \vec{J})$

التمرين9:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال [8، 0] كمايلي : $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$

1) عين جدول قيم الدالة f من أجل الأعداد 8،1،2،3،4،5،6،7 وفق الدالة f

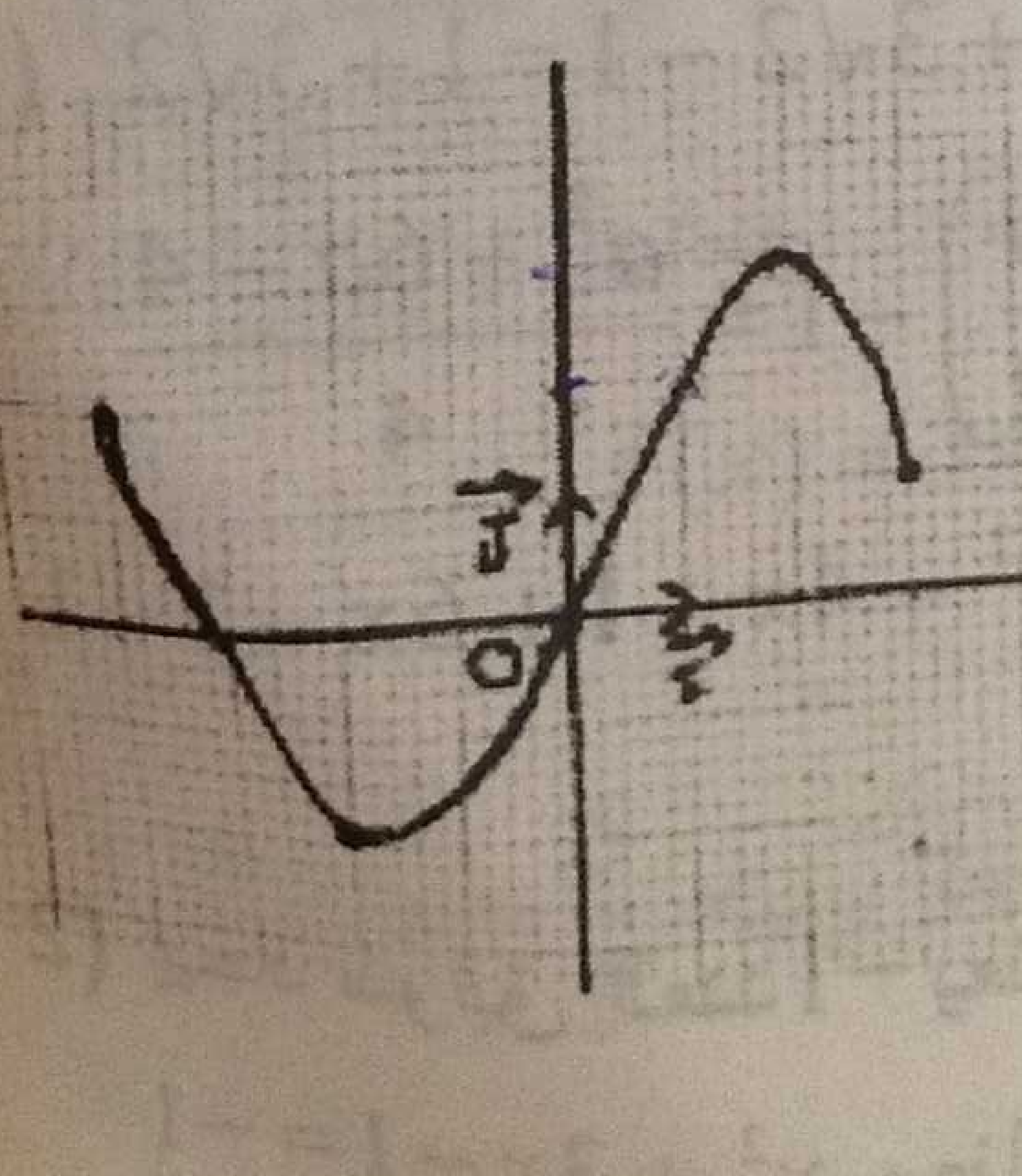
2) هل النقطة (5،3) A تنتمي إلى المنحني الممثل للدالة f؟

3) هل النقطة (4،3)B تنتمي إلى المنحنى الممثل لدالة f ؟

4) هل توجد نقطة c من المنحني الممثل للدالة تا فاصلتها 0,01؟

(تعطى النتائج بتقريب 10^{-2}).

التمرين 10:



(c) يمثل التمثيل البياني للدالــة العدديــة f (الشكل).

1) استنتج مجموعة تعريف الدالة f .

2) عيّن من المنحني (c) النقط التي تراتيبهـا معدومة .

3) عيّن من المنحني (c) التي تراتيبها 3، 2.

4) عيّن من المنحني (ي) النقط التي فواصلها 3 ، 2-.

الحلول

حل التمرين1:

1) $f(1,7)=4,1$ ، $f(-\pi)=3(-\pi)-1=-3\pi-1$ ،

$f(-1)=3(-1)-1=-4$

2) $f(x)=0$ معناه: $3x-1=0$ أي $3x=1$ ومنه $x=\frac{1}{3}$

$f(x)=-1$ معناه: $3x-1=-1$ أي $3x=-1+1=0$ ومنه $=\frac{0}{3}=0$

$f(x)=8$ معناه: $3x-1=8$ أي $3x=8+1=9$ ومنه $=\frac{9}{3}=3$

إذن سوابق الأعداد 0، 1-، 8 وفق الدالة f هي $\frac{1}{3}$، 0 ، 3 على الترتيب.

حل التمرين 2: من خلال التمثيل البياني (c) للدالة f ينتج أن مجمو

تعريف الدالة f هي [7، 3-]

	-1	0	4	لاتوجد	7أو0,2-	6	3	-4
(x	-3	0	2	4	-1	0	3	لاتوجد

حل التمرين3:

1) $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2+3\sqrt{2}-1=2+3\sqrt{2}-1=1+3\sqrt{2}$ ، $)=-1$

$f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2+3\left(\frac{a}{2}\right)-1=\frac{a^2+6a-4}{4}$ ، $a)=a^2+3a-1$

$x-1)=(2x-1)^2+3(2x-1)-1=4x^2-4x+1+6x-3-1$

$=4x^2+2x-3$

2) إيجاد سوابق العدد1- يعني حل المعادلة $f(x)=-1$ أي

$x^2+3x-1=-1$ معناه: $x^2+3x=-1+1=0$ أي $(x+3)=0$

ومنه $x=0$ أو $x=-3$ إذن توجد سابقتان للعدد 1- هما 0 ، 3-.

حل التمرين 4 :

الحالة a: من خلال التمثيل البياني لـ (C_f) و (C_g) ينتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[-3 ، 2]$ يحقق المساواة : $f(x)=g(x)$ وهو -2

أي $f(-2)=g(-2)$.

الأعداد الحقيقية x التي تحقق $f(x)\geq g(x)$ هي $[-2 ، 2]$.

الحالة b: بما أن (C_f) و (C_g) لا يتقاطعان في أية نقطة على المجال $[-3 ، 2]$

فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي x يحقق $f(x)=g(x)$.

الأعداد الحقيقية x التي تحقق $f(x)\geq g(x)$ هي $[-3 ، 2]$.

حل التمرين 5 :

$M_1\in(c)$ معناه : $f(1)=0$ ، $M_2\in(c)$ معناه $f(-1)=2$

$M_3\in(c)$ معناه : $f(0)=-2$

$f(0)=-2$ معناه: c=-2 أي 0+0+c=-2

$f(1)=0$ معناه : $a(1)^2+b(1)+c=0$ أي $a+b+c=0$ ...(1)

$f(-1)=2$ معناه: $a(-1)^2+b(-1)+c=2$ أي $a-b+c=2$ ....(2)

نعوض قيمة c في المعادلتين (1) و(2) نجد: $a+b-2=0$ أي $a=2-b$

$a-b-2=2$ أي $a-b=4$ ....(3) نعوض قيمة a في المعادلة (3).

$a-b=4$ معناه: $2-b-b=4$ أي $-2b=2$ ومنه $b=\dfrac{2}{-2}=-1$

إذن $a=2-b=2+1=3$ ومنه $f(x)=3x^2-x-2$

حل التمرين 6 :

1) $f(x)=\dfrac{1+x}{5-3x}$. $5-3x=0$ أي $3x=5$ ومنه $x=\dfrac{5}{3}$

إذن الدالة f معرفة على المجموعة

$$E=R-\left\{\frac{5}{3}\right\}=\left]-\infty ، \frac{5}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{3} ، +\infty\right[$$

2) $g(x)=\frac{2x+1}{x^2-16}$. $x^2-16=0$ معناه : $(x-4)(x+4)=0$

أي $x=-4$ أو $x=4$ إذن الدالة g معرفة على المجموعة

$E=R-\{-4، 4\}=]-\infty، -4[\cup]-4، 4[\cup]4، +\infty[$

3) $h(x)=\frac{-3}{x^2+8}$. $x^2+8=0$ معناه: $x^2=-8$ (مستحيل).

بما أنه لا توجد أية قيمة تعدم المقام فإن الدالة h معرفة على R.

4) $K(x)=\sqrt{4-5x}$. $4-5x\geq 0$ معناه : $5x\leq 4$ أي $x\leq\frac{4}{5}$

إذن الدالة K معرفة على المجموعة $E=\left]-\infty، \frac{4}{5}\right]$.

5) $p(x)=\sqrt{(2-x)(x+3)}$: تكون الدالة p معرفة إذا كـ

$(2-x)(x+3)\geq 0$.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$2-x$	+		+	0	−
$x+3$	−	0	+		+
$(2-x)(x+3)$	−	0	+	0	−
$\sqrt{(2-x)(x+3)}$	//////	0	+	0	//////

و منه مجموعة تعريف الدالة p هي $E=[-3; 2]$

حل التمرين 7:

1) بما أن الدالة f من الشكل : $Y=Ax+B$ فإن المنحني (C) هو مـ

2) حتى يكون العدد $\frac{5}{3}x$ طبيعيا يجب أن يكون x من مضاعفات 3 أي

$x=3K$.

$f(x)\in N$: $\frac{5}{3}x-5\geq 0$ أي $\frac{5}{3}x\geq 5$ إذن $x\geq 3$

إذن حتى تكون الفواصل و التراتيب أعداد طبيعية يجب أن يكون:

$x=3K$ حيث $K\in N^*$ و $f(x)=\frac{5}{3}\times 3K-5=5K-5$ و

- من أجل $K=1$ فإن $x=3$ و $y=5\times 1-5=0$
- من أجل $K=2$ فإن $x=6$ و $y=5\times 2-5=5$
- من أجل $K=3$ فإن $x=9$ و $y=5\times 3-5=10$
- من أجل $K=4$ فإن $x=12$ و $y=5\times 4-5=15$

إذن النقط التي فواصلها و تراتيبها أعداد طبيعية هي :

$A_1(3،0)$ ، $A_2(6، 5)$ ، $A_3(9، 10)$ ، $A_4(12، 15)$

حل التمرين 8:

لدينا $f(x)=5\left|x-\frac{2}{5}\right|$

1) العدد الموجب $f(x)$ يعبر عن 5 أضعاف المسافة بين العددين الحقيقيين x و $\frac{2}{5}$.

2) $f(-2)=5\left|-2-\frac{2}{5}\right|=5\left|\frac{-12}{5}\right|=5\times\frac{12}{5}=12$

$$f(-\sqrt{5})=5\left|-\sqrt{5}-\frac{2}{5}\right|=5\left|\frac{-5\sqrt{5}-2}{5}\right|=5\times\frac{5\sqrt{5}+2}{5}=5\sqrt{5}+2$$

$$f(1,4)=5\left|1,4-\frac{2}{5}\right|=5\left|\frac{7-2}{5}\right|=5\times\frac{5}{5}=5$$

3) إيجاد سوابق للعدد 3 يعني حل المعادلة $f(x)=3$ أي $5\left|x-\frac{2}{5}\right|=3$

إذن $|5x-2|=3$ أي $|5x-2|^2=3^2$ و منه $(5x-2)^2=9$

أي $(5x-2)^2-9=0$ و منه $(5x-2+3)(5x-2-3)=0$

أي $(5x+1)(5x-5)=0$ و منه $5x-5=0$ أو $5x+1=0$

إذن $x=1$ أو $x=\frac{-1}{5}$. ومنه العدد 3 له سابقتان وفق الدالة f هما 1 ،

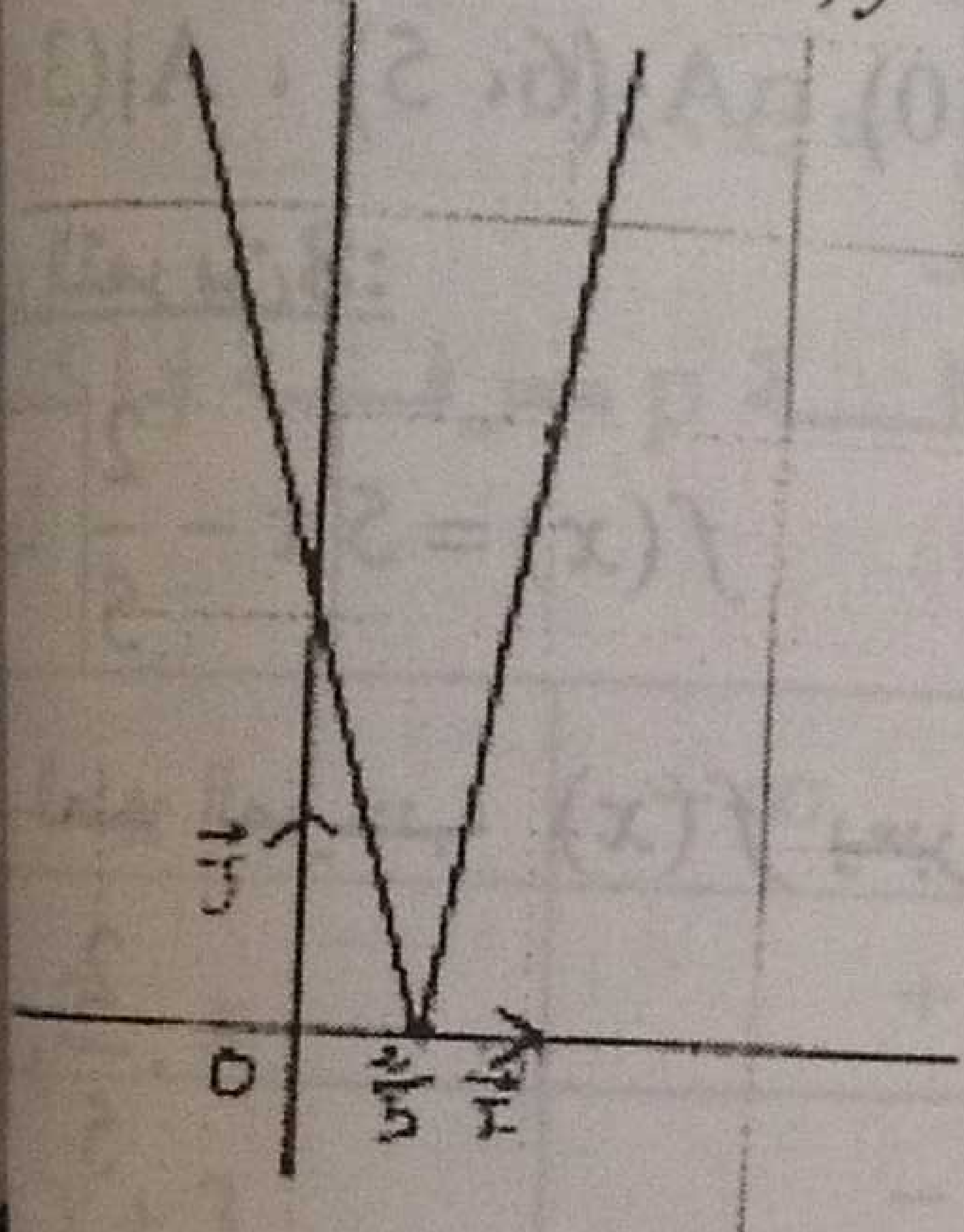
4) كتابة $f(x)$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة.

$$\begin{cases} f(x)=5x-2 ، x \geq \frac{2}{5} \\ f(x)=-(5x-2) ، x < \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} f(x)=5x-2, x \geq \frac{2}{5} \\ f(x)=-5x+2, x < \frac{2}{5} \end{cases}$$

بما أن الدالة f من الشكل : $y = Ax + B$ فإن التمثيل البياني (C) لدالة هو اتحاد نصفي مستقيمين معادلتيهما $y = 5x - 2, y = -5x + 2$.

x	$\frac{2}{5}$	1
$f(x)$	0	3

x	$\frac{2}{5}$	0
$f(x)$	0	2



حل التمرين9:

لدينا $[0 ، 8]$ $x \in$ ، $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(1

1	2	3	4	5	6	7	8
3	2,83	2,89	3	3,13	3,27	3,40	3,54

2) من خلال جدول القيم للدالة f ينتج أن النقطة $A(5 ، 3)$ لا تنتمي التمثيل البياني لـ f.

3) من خلال جدول القيم للدالة f ينتج أن النقطة $B(4 ، 3)$ تنتمي إلى البياني لـ f.

4) بما أن $0,01 \in]0, 8]$ فإن النقطة c موجودة وترتيبها هو $f(0,01)$.

$$f(0,01)=\frac{0,01+2}{\sqrt{0,01}}=\frac{2,01}{0,1}=20,1$$ ومنه $c(0,01, 20,1)$

حل التمرين 10:

1) الدالة f معرفة على المجال $[-4;3]$.

2) توجد نقطتان من (c) ترتيبيهما معدومين هما $A(0;0)$، $B(-3\ ;0)$.

3) نرسم المستقيم ذي المعادلة $y=2$ نقط تقاطع هذا المستقيم مع المنحني (c) هي النقط التي ترتيبها 2 .إذن توجد ثلاث نقط هي : $H(2,9\ ;2)$ ، $G(1;2)$ ، $F(-4\ ;2)$.

نرسم المستقيم ذي المعادلة $y=3$. نقطْ تقاطع هذا المستقيم مع المنحنى (c) هي النقط التي تراتيبها 3. إذن توجد نقطة واحدة هي $A'(2\ ;3)$.

4) النقطتان اللتان فاصلتهما 3، 2- هما على الترتيب $B'(3\ ;1)$، $H'(-2;-2)$.

4 تغيرات الدوال ـالدوال الزوجية والدوال الفردية

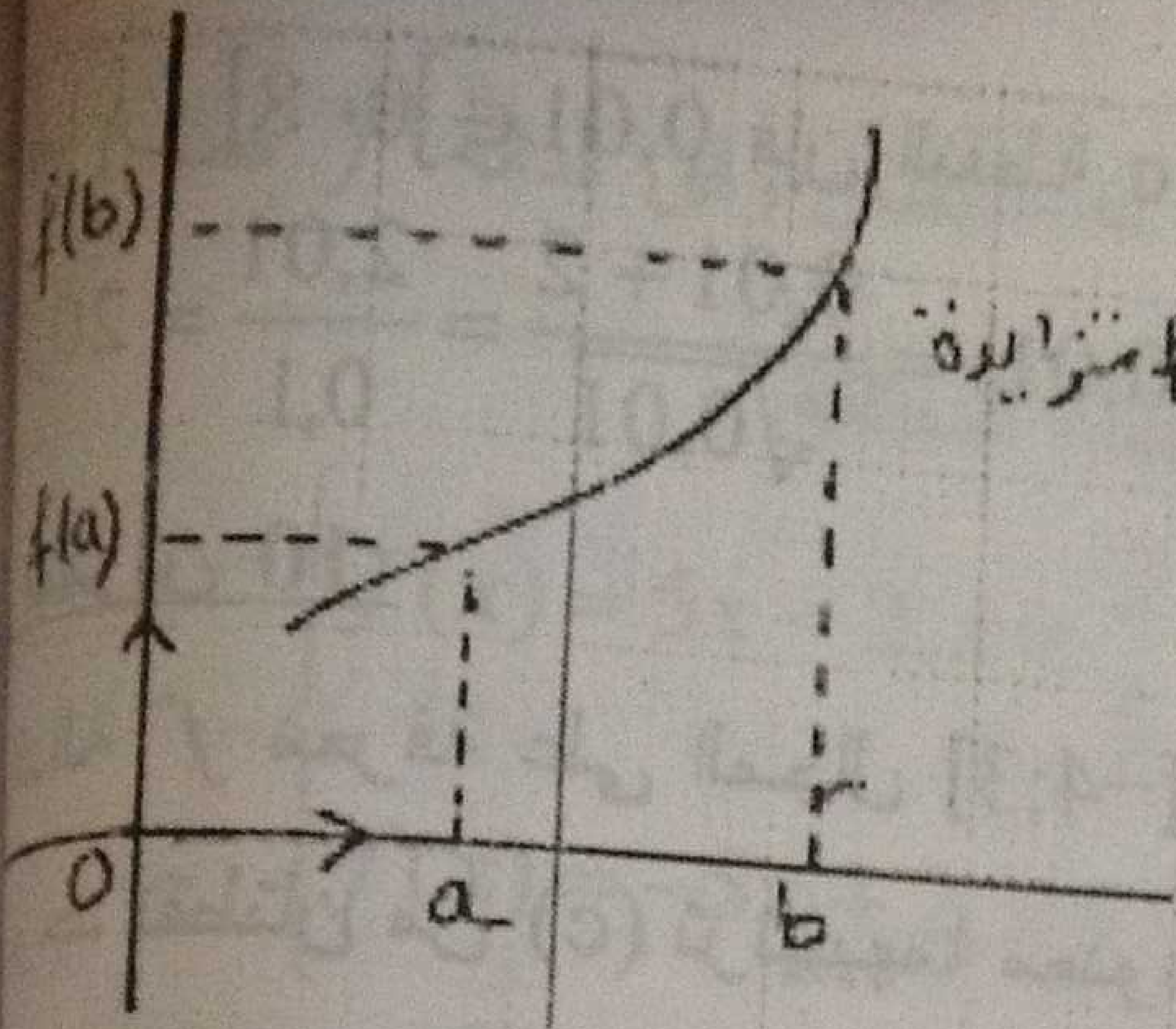
معارف:

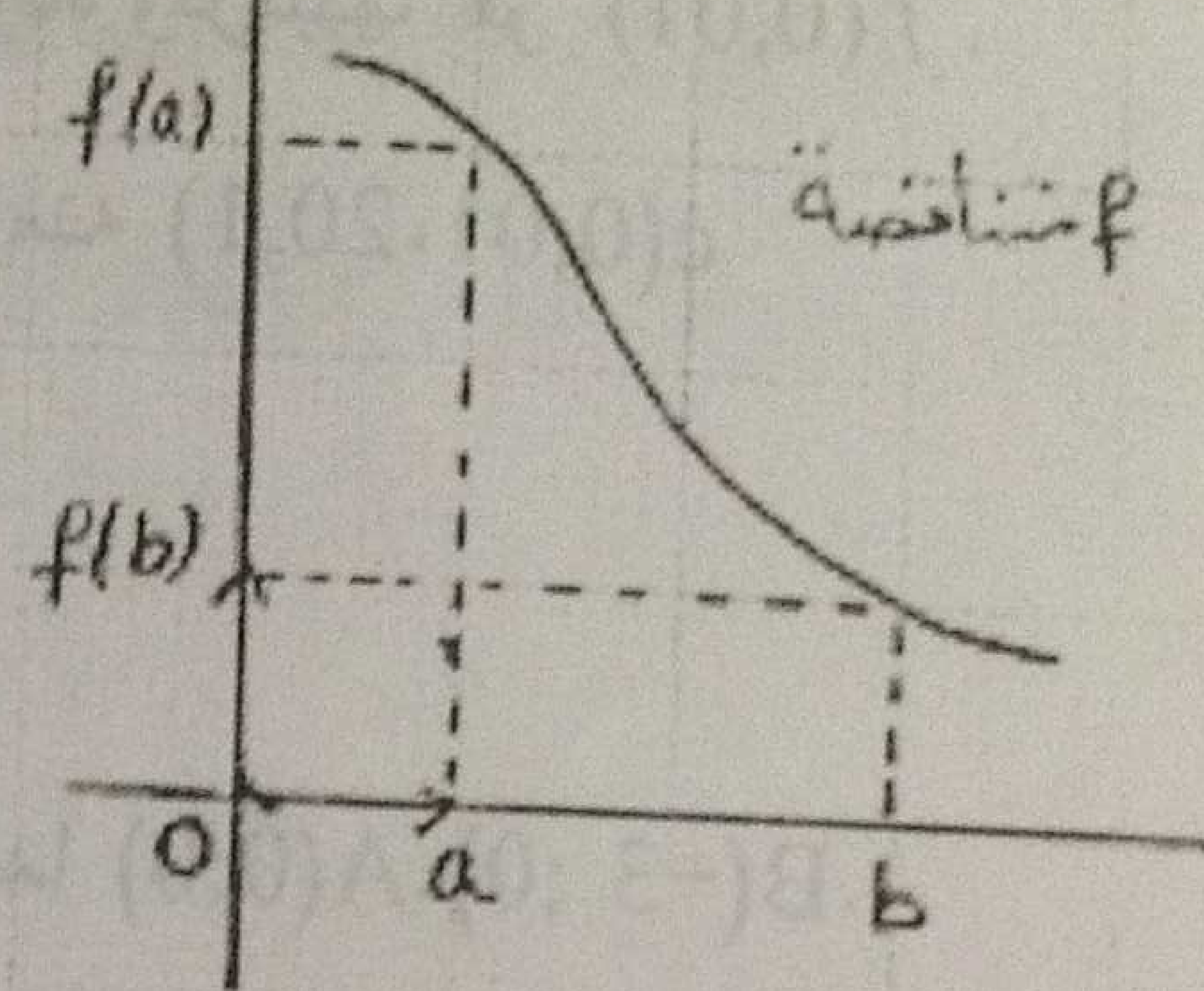
اتجاه تغير دالة : لتكن f دالة معرفة على مجموعة E من R.

تعريف1:

تكون الدالة f متزايدة على E، من أجل كل ثنائية $(a,b)\in E^2$:
إذا كان $a<b$ فإن $f(a)\le f(b)$.

تكون الدالة f متناقصة على E، من أجل كل ثنائية $(a,b)\in E^2$:
إذا كان $a<b$ فإن $f(a)\ge f(b)$





التعريف 2: تكون الدالة f رتيبة على مجال E إذا كانت الدالة f متناقصة أو متزايدة على هذا المجال.

جدول تغيرات دالة على مجال:

جدول تغيرات دالة هو جدول نلخص فيه نتائج اتجاه تغير دالـــة ، أي تعبـ المجالات (من مجموعة تعريف الدالة) التي تكـون فيهـا الدالـة متزايـ والمجالات التي تكون فيها الدالة متناقصة.

تطبيق 1:

إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[-2; 4]$، ومتزايدة على المجال $[-2;2]$ ومتناقصة على المجال $[2; 4]$ حيث $f(-2) = -3$ ، $f(2) = 1$ ، $f(4) = -10$

فإن جدول تغيرات هذه الدالة هو :

x	-2		2		4
$f(x)$			1		
		↗		↘	
	-3				-10

القيمة الصغرى والقيمة العظمى لدالة :

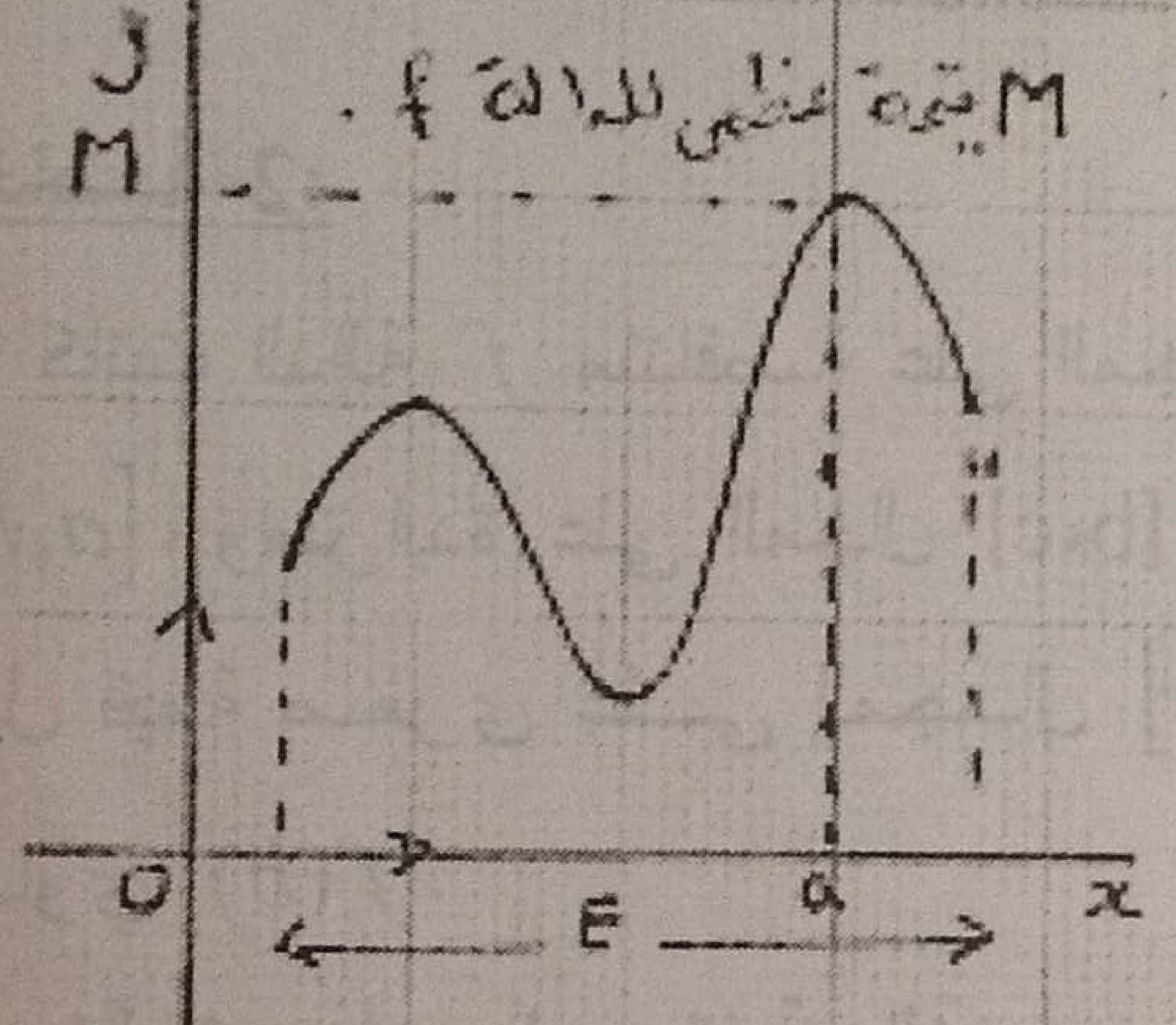
التعريف 3: لتكن f دالة معرفة على مجال E من R.

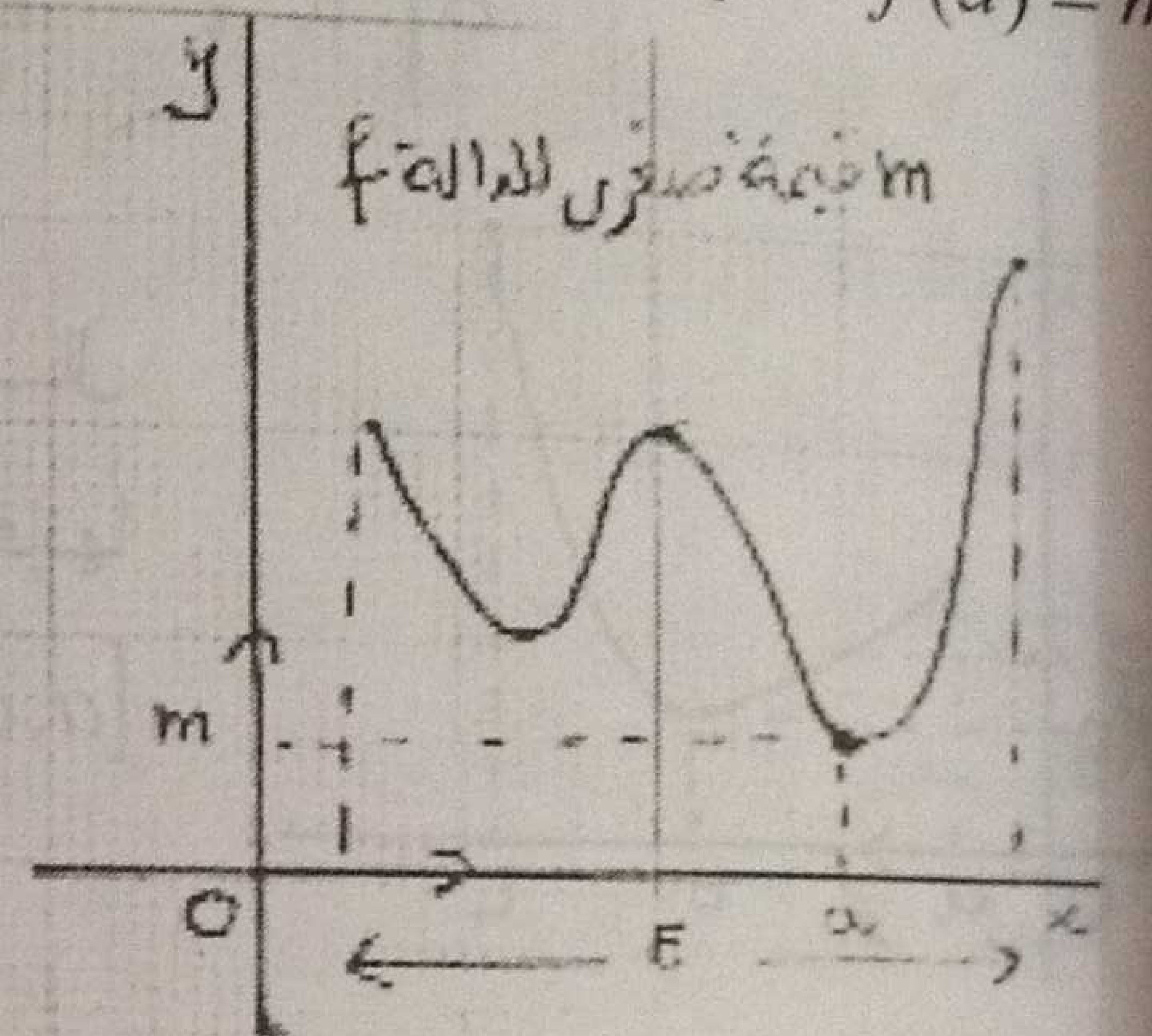
* تكون للدالة f قيمة عظمى M على المجال E، إذا كان العدد $f(x)$

أكبر قيمة من أجل $x \in E$، أي يوجد عدد حقيقي $a \in E$ حيث $f(a) = M$.

ومهما كان العنصر x من E فإن $f(x) \leq M$.

* تكون للدالة f قيمة صغرى m على المجال E، إذا كان العدد $f(x)$ يأخذ أصغر قيمة من أجل $x \in E$، أي يوجد عدد حقيقي $a \in E$ حيث $f(a) = m$، مهما كان العنصر x من E فإن $f(x) \geq m$



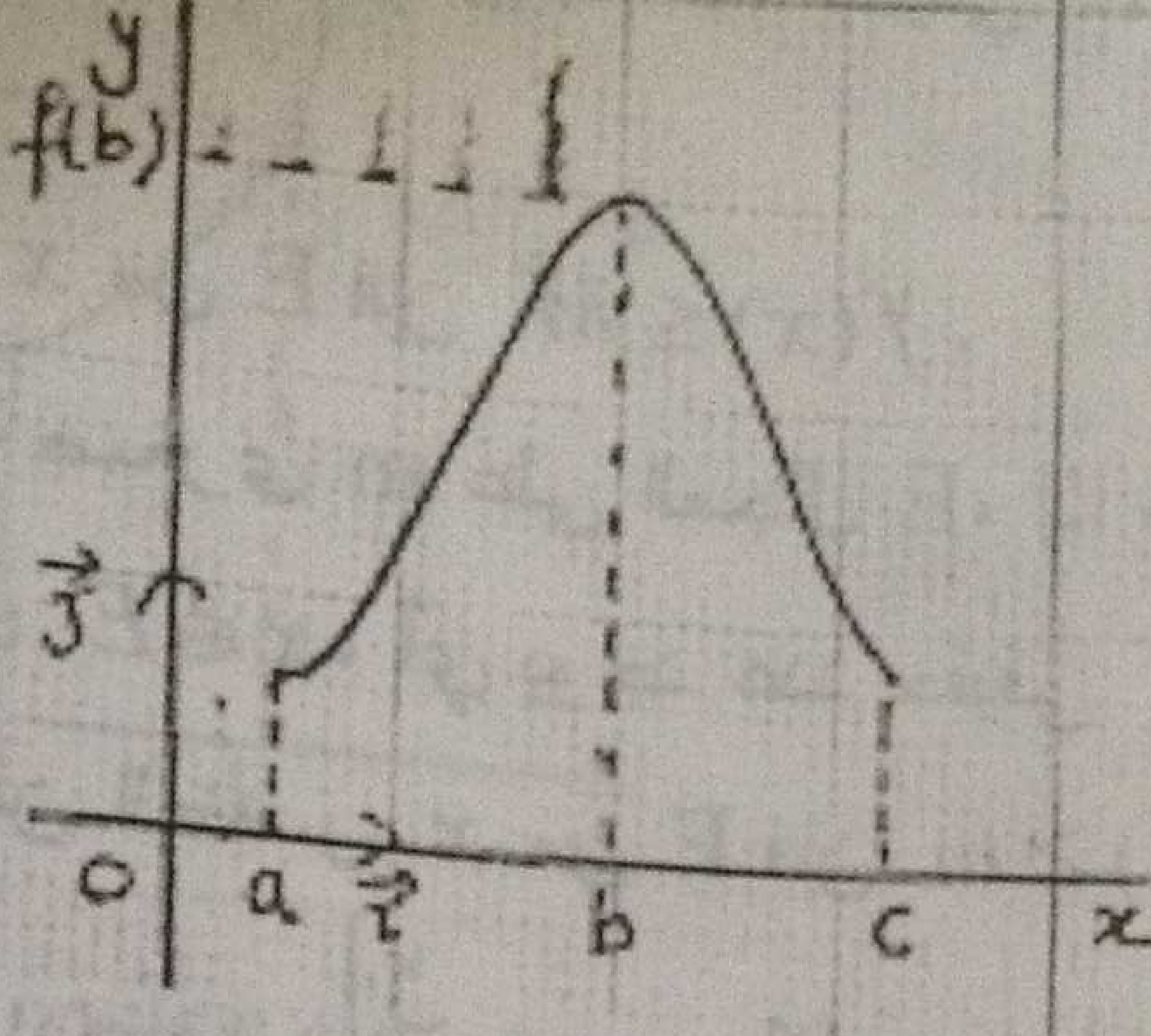


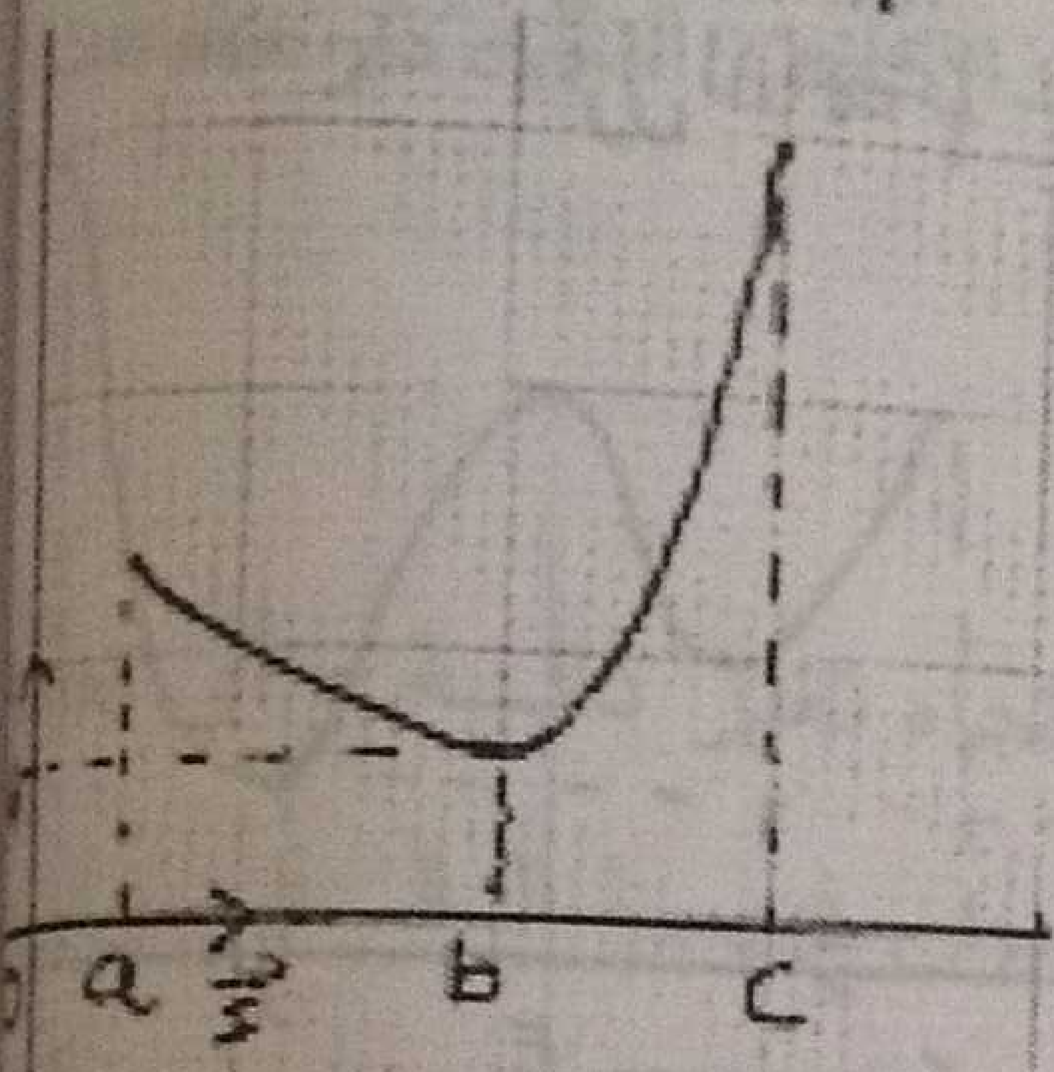
تطبيق 2 :

الدالة f المعرفة على R حيث $f(x) = x^2$ تقبل قيمة صغرى تساوي 0 لأن مهما يكن العدد الحقيقي x من R فإن $f(x) \geq 0$. ولا تقبل قيمة عظمى .

الخاصية 1:

إذا كانت الدالة f متزايدة على المجال $[a,b]$، ومتناقصة على المجال [b،c] فإنها تقبل قيمة عظمى على المجال $[a,c]$ تساوي $f(b)$.





الخاصية 2:

إذا كانت الدالة f متناقصة على المجال $[a,b]$، ومتزايدة على المجال $[b،c]$ فإنها تقبل قيمة صغرى على المجال $[a,c]$ تساوي $f(b)$.

طريقة البرهان على رتابة دالة:

لمعرفة رتابة الدالة f حيث $a<b$ من المجال E عددان حقيقيان b و a نحسب الفرق $f(b)-f(a)$ ثم ندرس إشارته بالتحليل ونميز الحالتين E

* إذا كان $f(b)-f(a)\geq 0$ أي $f(a)\leq f(b)$ فإن الدالة f متزايدة على المجال E.

* إذا كان $f(b)-f(a)\leq 0$ أي $f(a)\geq f(b)$ فإن الدالة f متناقصة على المجال E.

تطبيق 3 :

برهن أن الدالة $f:x\mapsto x^2-2x-1$ متزايدة على المجال $[1;+\infty[$

الحل:

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $1\leq a<b$ نحسب الفرق $f(b)-f(a)$

$$f(b)-f(a)=b^2-2b-1-(a^2-2a-1)=b^2-2b-1-a^2+2a+1$$
$$=b^2-a^2-2b+2a=(b-a)(b+a)-2(b-a)=(b-a)(b+a-2)$$
$$=(b-a)[(a-1)+(b-1)]$$

بما أن $a\geq 1$ و $b>1$ أي $a+b>2$ إذن $a+b-2>0$ ولدينا $b-a>0$

ومنـــــــــه $(b-a)(a+b-2)>0$ أي $f(b)-f(a)>0$ إذن

$f(a)<f(b)$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[1,+\infty[$.

✓ <u>إنشاء جدول تغيرات دالة :</u>

a و b عددان حقيقيان من مجموعة التعريف E حيث $a<b$ نحسب العبـــارة $f(b)-f(a)$ ثم نحللها إلى جداء قوسين (لتسهيل دراسة الإشارة)، وندرس إشارتها أي تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة، والمجــالات التـــي تكون فيها الدالة متناقصة ثم نشكل جدولا يحتوي على سطرين، نكتــب فـــي السطر الأول مجموعة تعريف الدالة f ، والقيمة المؤثرة في اتجـاه التغيـــر، ونرسم في السطر الثاني أسهم الرتابة (سهم نحو الأعلى إذا كانت f متزايدة وسهم نحو الأسفل إذا كانت f متناقصة).

<u>تطبيق 4:</u>

أنشئ جدول تغيرات الدالة : $f:x\mapsto x^2-6x+3$ ، المعرفة على R

<u>الحل :</u>

ليكن a و b عددان حقيقيان من R حيث $a<b$ نحسب ثم نحلل $f(b)-f(a)$

$$f(b)-f(a)=b^2-6b+3-(a^2-6a+3)=b^2-a^2-6b+6a$$
$$=(b-a)(b+a)-6(b-a)=(b-a)(a+b-6)$$
$$=(b-a)[(a-3)+(b-3)]$$

لدينا $b-a>0$ إذن إشارة $f(b)-f(a)$ هي من إشارة $a+b-6$

<u>على المجال:</u> $[3\,;+\infty[$:

$a\geq 3$ و $b>3$ أي $a+b>6$ إذن $a+b-6>0$

إذن $f(b)-f(a)>0$ أي $f(a)<f(b)$ ومنه f متزايدة على المجال $[3;+\infty[$.

على المجال $]-\infty;3]$:

$a<3$ و $b\le 3$ أي $a+b<6$ إذن $a+b-6<0$ أي $f(b)-f(a)<0$

ومنه $f(a)>f(b)$ إذن f متناقصة على المجال $]-\infty;3]$.

ولدينا $f(3)=-6$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	↘	-6	↗

طريقة البرهان على أن الدالة f تقبل قيمة حدية على المجال $[a;b]$ عند

الطريقة الأولى: نحسب $f(c)-f(x)$ ونبين أن هذه العبارة لها إشارة ثا

الطريقة الثانية: نبين أن الدالة f متزايدة أو (متناقصة) على المجال [a;c

ومتناقصة (أو متزايدة) على المجال [c ;b] فإنها تقبل قيمة عظمى (صغرى)

عند c تساوي $f(c)$.

تطبيق5:

بيّن أن الدالة: $f:x\mapsto -x^2+4x$ المعرفة على R تقبل قيمة عظمى عن

الحل:

نستخدم الطريقة الأولى: لدينا $f(2)=4$ ونبين أن $f(2)-f(x)$ موجب

مهما كان x من R.

$$f(2)-f(x)=4-(-x^2+4)=4+x^2-4x=(x-2)^2$$

ونعلم أن مربع أي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب أي $f(2)-f(x)\ge 0$

ومنه $f(x)\le f(2)$ إذن f تقبل قيمة عظمى على R تساوي $f(2)=4$

✓ **استعمال الدوال في حل مسائل ذات وضعيات عملية (ترييض المشكلات).**

تطبيق6 :

لدى نجار لوحة خشبية طولها 8m يريد صنع نافذة باستعمال هذه اللوحة .

كيف يمكن اختيار طول وعرض النافذة بحيث تدخل هذه النافذة أكبر كمية من الضوء ؟

الحل :

نرمز بـ x إلى عرض النافذة وy طولها (x وy عددان موجبان تماما) .

نعلم أن محيط النافذة هو $2(x+y)$ ويساوي طول اللوحة الخشبية أي 8m.

أي $2(x+y)=8$ معناه : $x+y=4$ ومنه $y=4-x$

مساحة النافذة هي : $A=xy$ حتى تدخل هذه النافذة أكبر كمية من الضوء يجب أن تكون المساحة أكبر ما يمكن.

نضع $A(x)=xy=x(4-x)=-x^2+4x$

نبحث عن قيمة x من المجال [4، 0] التي تجعل $A(x)$ تأخذ قيمة عظمى .

ندرس تغيرات هذه الدالة على المجال [4، 0] (سبق دراسة هـذه الدالـة فـي التطبيق 5).

وجدنا أن القيمة العظمى للدالة A هي 4 $f(2)=4$ أي $x=2$.

ومنه 2 $y=4-x=4-2=2$

إذن يختار هذا النجار النافذة مربعة الشكل طول ضلعها 2m.

اختبر معلوماتك :

بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان).

1) إذا كانت f دالة متزايدة على المجال [a;b] فإن $f(a)\leq f(b)$

2) إذا كانت f وg دالتان معرفتان على نفس المجموعة E فإن لهما نفس جدول التغيرات.

3) إذا كانت f دالة معرفة على المجال $[a;b]$، وتقبل قيمة عظمى تساوي 7 فإنه من أجل كل عنصر x من $[a;b]$: $f(x) \leq 7$

4) إذا كانت f دالة متناقصة على المجال $[-3 ، 20]$ فإن $f(-3) < f(20)$

5) إذا كان f معرفة و متزايدة على المجال $[a ; b]$، فإن $f(a)$ هي قيمة صغرى للدالة f، و $f(b)$ هي قيمة عظمى للدالة f.

6) إذا كانت f دالة معرفة ومتناقصة على المجال $[a;b]$ فإن $f(a)$ هي قيمة عظمى للدالة f، و $f(b)$ هي قيمة صغرى للدالة f.

7) الدالة : $f : x \to x^2$ متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty ; 0]$.

8) f دالة متزايدة على المجال $[1 ; 4]$ إذا كان $1 < x < 3$ فإن $f(1) < f(x) < f(3)$.

9) f دالة متناقصة على المجال $[-10;0]$ إذا كان $-5 < x < 0$ فإن $f(0) < f(x) < f(-5)$.

10) إذا كانت f دالة رتيبة على المجالين $[a;b]$ و $[b ;c]$ حيث $a<b<c$ فإنها رتيبة على المجال $[a;c]$.

11) f دالة معرفة على المجال $[a;b]$ وتقبل قيمة صغرى $f(a)$، وقيمة عظمى $f(b)$ فهي متزايدة على المجال $[a ; b]$.

التمارين

التمرين 1:

f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على R كما يلي : $f: x \mapsto -2x^2 + 3$

برهن أن الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$. ثم استنتج القيمة العظمى للدالة تا.

التمرين 2:

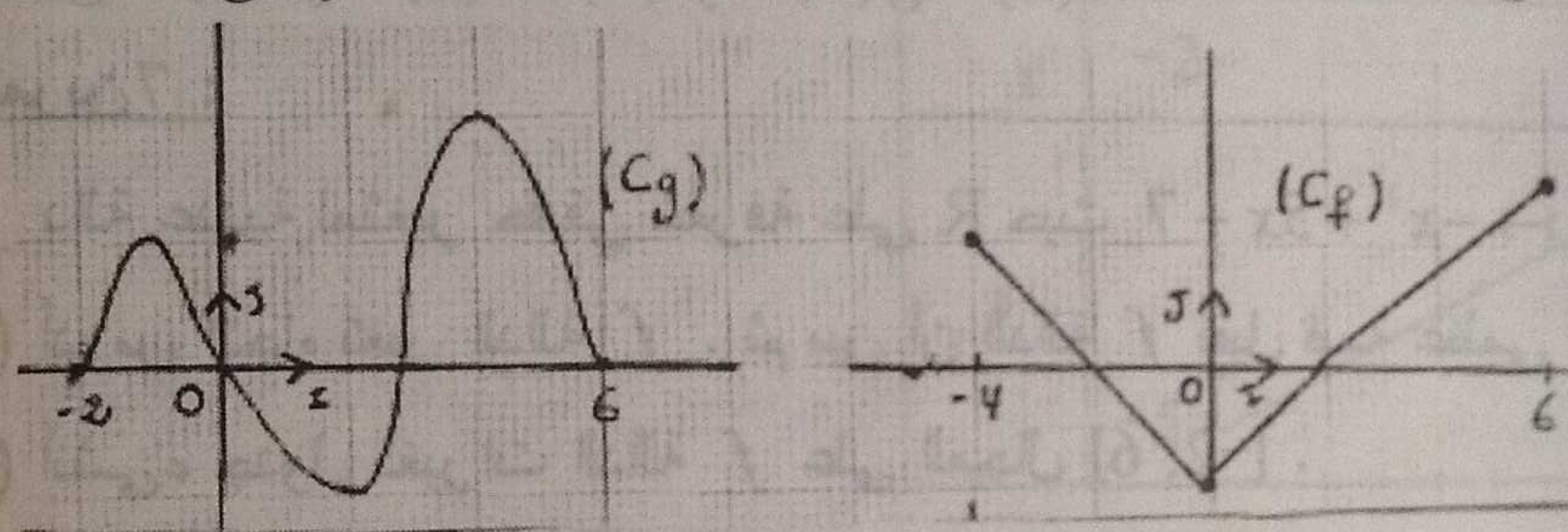
f دالة عددية معرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f: x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

- برهن أن الدالة f متزايدة على كل من المجالين : $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

التمرين 3:

(c_f) و (c_g) هما تمثيلان بيانيان للدالتين f و g على الترتيب .

- استنتج في كل حالة المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة والمجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة ثم شكل جدول تغيراتها .
- استنتج القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل من الدالتين f و g.



التمرين 4:

f دالة متناقصة على المجال $[-3;-1]$ حيث $f(x)=2+x^2$.

و g دالة متزايدة على المجال $[1;4]$ حيث $g(x)=\dfrac{-1}{x}$.

- أوجد حصرا لصورة العدد x وفق الدالة f حيث $x\in[-3;-1]$.
- أوجد حصرا لصورة العدد x وفق الدالة g حيث $x\in[1;4]$

التمرين 5 :

يمثل الجدول التالي جدول تغيرات الدالة f، أنشئ لبتمثيل البياني للدالة f مستنتجا المجالات التي تكون فيها متزايدة والمجالات التي تكون فيها متناقصة.

f	$-4 \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow 4$

التمرين 6:

f و g دالتان معرفتان على نفس المجموعة E. f دالة متزايدة على E و g دالة متناقصة على E.

أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين h و k حيث :

$$K(x) = g(x) - f(x) \text{ ، } h(x) = f(x) - g(x)$$

التمرين 7 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على R حيث $f : x \mapsto -x^2 + 5x + 7$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . ثم بين أن الدالة f تقبل قيمة عظمى .

2) أنشىء جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2; 6]$.

التمرين 8:

يمثل الجدول التالي جدول بعض قيم الدالة f .

x	-2	-1	2	4
$f(x)$	-2	π	1	4

- استنتج جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ التمثيل البياني لها على المجال $[-2;4]$.

- استنتج القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f.

التمرين 9:

f دالة معرفة على المجال $[a ; b]$ ، تقبل قيمة صغرى $m = -4$ و قيمة عظمى $M = 2$. فسّر وجود القيمة الصغرى و القيمة العظمى لكل من الد

k, h,g المعرفة كما يلي :

$$K(x)=[f(x)]^2 \text{ ، } h(x)=-2f(x) \text{ ، } g(x)=f(x)+3$$

التمرين10:

f دالة عددية معرفة على R كما يلي: $f:x\mapsto -2005x+2006$

برهن أن الدالة f متناقصة على R.

التمرين11:

يمثل الجدول التالي جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-2;3]$ في الحالتين :

x	-2		3
f	-5	↗	-2

x	-2		-1		2		3
f	12	↘	2	↗	3	↘	1

شكل جدول تغيرات كل من الدالتين g و h حيث $h(x)=f(x)-4$ ، $g(x)=-2f(x)$

k, h,g المعرفة كما يلي :

$$g(x)=f(x)+3 \text{ ، } h(x)=-2f(x) \text{ ، } K(x)=[f(x)]^2$$

التمرين10:

f دالة عددية معرفة على R كما يلي: $f: x \mapsto -2005x+2006$

برهن أن الدالة f متناقصة على R.

التمرين11:

يمثل الجدول التالي جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال [3 ;2-] في الحالتين :

x	-2		3
f	-5	↗	-2

x	-2		-1		2		3
f	12	↘	2	↗	3	↘	1

شكل جدول تغيرات كل من الدالتين g و h حيث $h(x)=f(x)-4$ ، $g(x)=-2f(x)$

حل التمرين 1:

لدينا $f(x)=-2x^2+3$

ليكن a وb عددان حقيقيان حيث $a<b$. نحسب الفرق $f(b)-f(a)$ ثم

$$f(b)-f(a)=-2b^2+3-(-2a^2+3)=-2b^2+3+2a^2-3$$

$$=-2b^2+2a^2=-2(b^2-a^2)=-2(b-a)(b+a)$$

بما أن $b-a>0$ فإن إشارة $f(b)-f(a)$ هي من إشارة العـ

$-2(b+a)$

- إذا كان $a\geq 0$ و $b>0$ فإن $a+b>0$ أي $-2(a+b)<0$

ومنـــــه $-2(b+a)(b-a)>0$ أي $f(b)-f(a)>0$

$f(a)>f(b)$

ومنه الدالة f متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ و $f(0)=3$

- إذا كان $a<0$ و $b\leq 0$ فإن $a+b<0$ أي $-2(a+b)>0$

ومنه $-2(a+b)(b-a)>0$ أي $f(b)-f(a)>0$ إذن $f(a)<f(b)$

ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ و $f(0)=3$

إذن القيمة العظمى للدالة تا هي $f(0)=3$.

حل التمرين 2:

لدينا $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ، $x\in R-\{1\}$

ليكن a وb عددان حقيقيان يختلفان عن 1 حيـــث $a<b$. نحســب الفـ

$f(b)-f(a)$

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-a}=\frac{1-a-(1-b)}{(1-b)(1-a)}=\frac{b-a}{(1-b)(1-a)}$$

بمـــا أن $b-a>0$ فـــإن إشـــارة $f(b)-f(a)$ هـــي مـــن إشـ

$(1-b)(1-a)$

• إذا كـــــان $a<1$ و $b<1$ أي $1-a>0$ و $1-b>0$ ومنـــــــه $(1-a)(1-b)>0$

أي $\frac{1}{(1-a)(1-b)}>0$ إذن $\frac{b-a}{(1-a)(1-b)}>0$ ومنـــــــه $f(b)-f(a)>0$. إذن $f(b)>f(a)$

ومنه f متزايدة على المجال $]-\infty;1[$.

• إذا كان $a>1$ و $b>1$ أي $1-a<0$ و $1-b<0$ فإن $-(1-a)>0$ و $-(1-b)>0$.

إذن $(1-a)(1-b)>0$ ومنه $\frac{1}{(1-a)(1-b)}>0$ إذن $\frac{b-a}{(1-a)(1-b)}>0$

أي $f(b)-f(a)>0$ ومنه $f(b)>f(a)$ إذن f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

<u>حل التمرين 3:</u>

1) الدالة f معرفة على المجال $[-4;6]$، ومتزايدة على المجال $[0;6]$، ومتناقصة على المجال $[-4;0]$.

وجدول تغيراتها هو :

x	−4		0		6
f	2	↘	−2	↗	3

القيمة العظمى للدالة f هي 3 والقيمة الصغرى لها هي −2.

2) الدالة g معرفة على المجال $[-2;6]$ ، ومتزايدة على المجال $[-2;-1]\cup[2;4]$ ومتناقصة على المجال $[-1;2]\cup[4;6]$

وجدول تغيراتها هو:

x	−2		−1		2		4		6
f	0	↗	2	↘	−2	↗	4	↘	0

القيمة العظمى للدالة g هي 4، والقيمة الصغرى لها هي −2.

حل التمرين 4:

1) إيجاد حصر للعدد $f(x)$ حيث $x \in [-3;-1]$ و $f(x) = 2 + x^2$

إذا كان $-3 \le x \le -1$ فإن $f(-1) \le f(x) \le f(-3)$ (لأن f متناقصة)

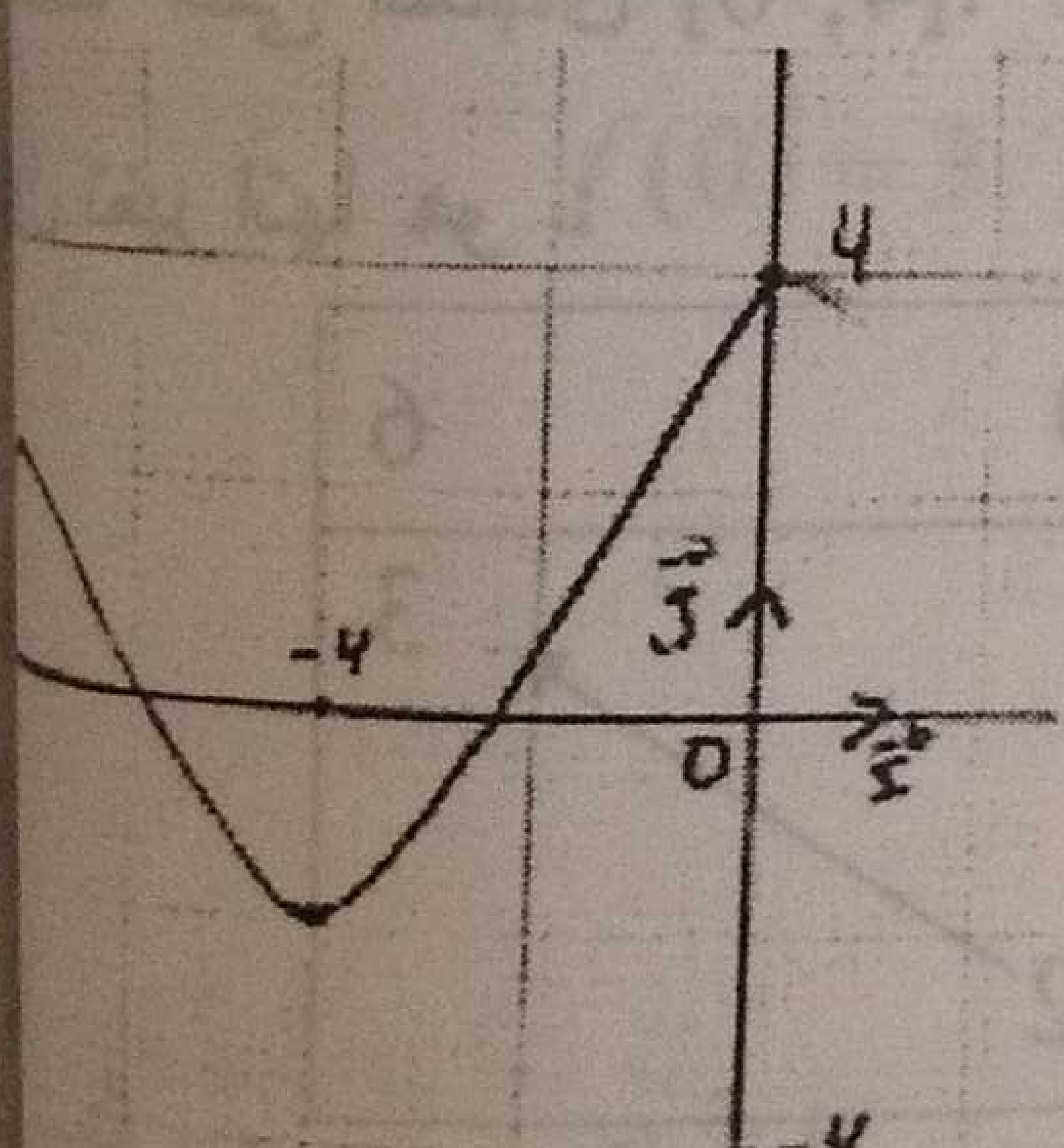
أي $3 \le f(x) \le 11$ ومنه المجال $[3; 11]$ هو حصر للعدد $f(x)$.

2) إيجاد حصر للعدد $g(x)$ حيث $x \in [1; 4]$ و $g(x) = \dfrac{-1}{x}$

إذا كان $1 \le x \le 4$ فإن $g(1) \le g(x) \le g(4)$ (لأن g متزايدة).

أي $-1 \le g(x) \le \dfrac{-1}{4}$ ومنه المجال $[-1; \dfrac{-1}{4}]$ هو حصر للعدد $g(x)$

حل التمرين 5:



ينتج من جدول التغيرات أن الدالة f

متزايدة على المجال $[-10;-8] \cup [-4;0]$

ومتناقصة على المجال $[-8;-4]$.

حل التمرين 6:

1) ندرس اتجاه تغير الدالة h حيث $h(x) = f(x) - g(x)$ و $x \in E$

ليكن a و b عددان من E حيث $a < b$ بما أن f دالة متزايدة على E

فإن : $f(a) < f(b)$

أي $f(b)-f(a)>0$ بما أن الدالة g متناقصة على E فإن $g(a)>g(b)$

أي $g(a)-g(b)>0$

$$h(b)-h(a)=(f(b)-g(b))-(f(a)-g(a))=f(b)-g(b)$$
$$-f(a)+g(a)=[f(b)-f(a)]+[g(a)-g(b)]$$

وبما أن $f(b)-f(a)>0$ و $g(a)-g(b)>0$ أي

$$[(f(b)-f(a))+(g(a)-g(b))]>0$$

ومنه $h(b)-h(a)>0$ أي $h(b)>h(a)$ إذن h دالة متزايدة على E.

2) ندرس اتجاه تغير الدالة k حيث $k(x)=g(x)-f(x)$ و $x\in E$.

نلاحظ أن $k(x)=-h(x)$.

$h(b)>h(a)$ معناه : $-h(b)<-h(a)$ أي $k(b)<k(a)$ ومنه k متناقصة على E. (يمكنك البرهان بطريقة أخرى).

<u>حل التمرين 7:</u>

1) لدينا $f(x)=-x^2+5x+7$ و $x\in R$.

- ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$. نحسب الفرق $f(b)-f(a)$ ثم نحلله.

$$f(b)-f(a)=-b^2+5b+7-(-a^2+5a+7)$$
$$=-b^2+5b+7+a^2-5a-7$$
$$=-b^2+a^2+5b-5a=-(b-a)(b+a)+5(b-a)$$
$$=-(b-a)(b+a-5)=-(b-a)\left[\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(a-\frac{5}{2}\right)\right]$$

• إذا كان $a\geq\frac{5}{2}$ و $b>\frac{5}{2}$ أي $a-\frac{5}{2}\geq 0$ و $b-\frac{5}{2}>0$ فإن

$$\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(a-\frac{5}{2}\right)>0$$

ومنه $-(b-a)\left[\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(a-\frac{5}{2}\right)\right]<0$ أي $f(b)-f(a)<0$

$$f(a)>f(b)$$

ومنه الدالة f متناقصة على المجال $]+\infty\,;\frac{5}{2}[$.

* إذا كان $a<\frac{5}{2}$ و $b\leq\frac{5}{2}$ أي $a-\frac{5}{2}<0$ و $b-\frac{5}{2}\leq 0$ إذن

$$\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(a-\frac{5}{2}\right)<0$$

ومنه $-(b-a)\left[\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(a-\frac{5}{2}\right)\right]>0$ أي $f(b)-f(a)\geq 0$

$$f(a)<f(b)$$

ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty\,;\frac{5}{2}[$.

* إذا كان $x\geq\frac{5}{2}$ فإن $f(x)\leq f\left(\frac{5}{2}\right)$ أي $f(x)\leq\frac{53}{4}$ (لأن f متناقصة

وإذا كان $x\leq\frac{5}{2}$ فإن $f(x)\leq f\left(\frac{5}{2}\right)$ أي $f(x)\leq\frac{53}{4}$ (لأن f متزايدة

ومنه f تقبل قيمة عظمى هي $\frac{53}{4}$.

2) ينتج على المجال $[-2;\,6]$ أن الدالة f متزايدة على المجال $]\frac{5}{2}$

ومتناقصة على المجال $[\frac{5}{2}\,;\,6]$ حيث $f(-2)=-7$ و $f(6)=1$

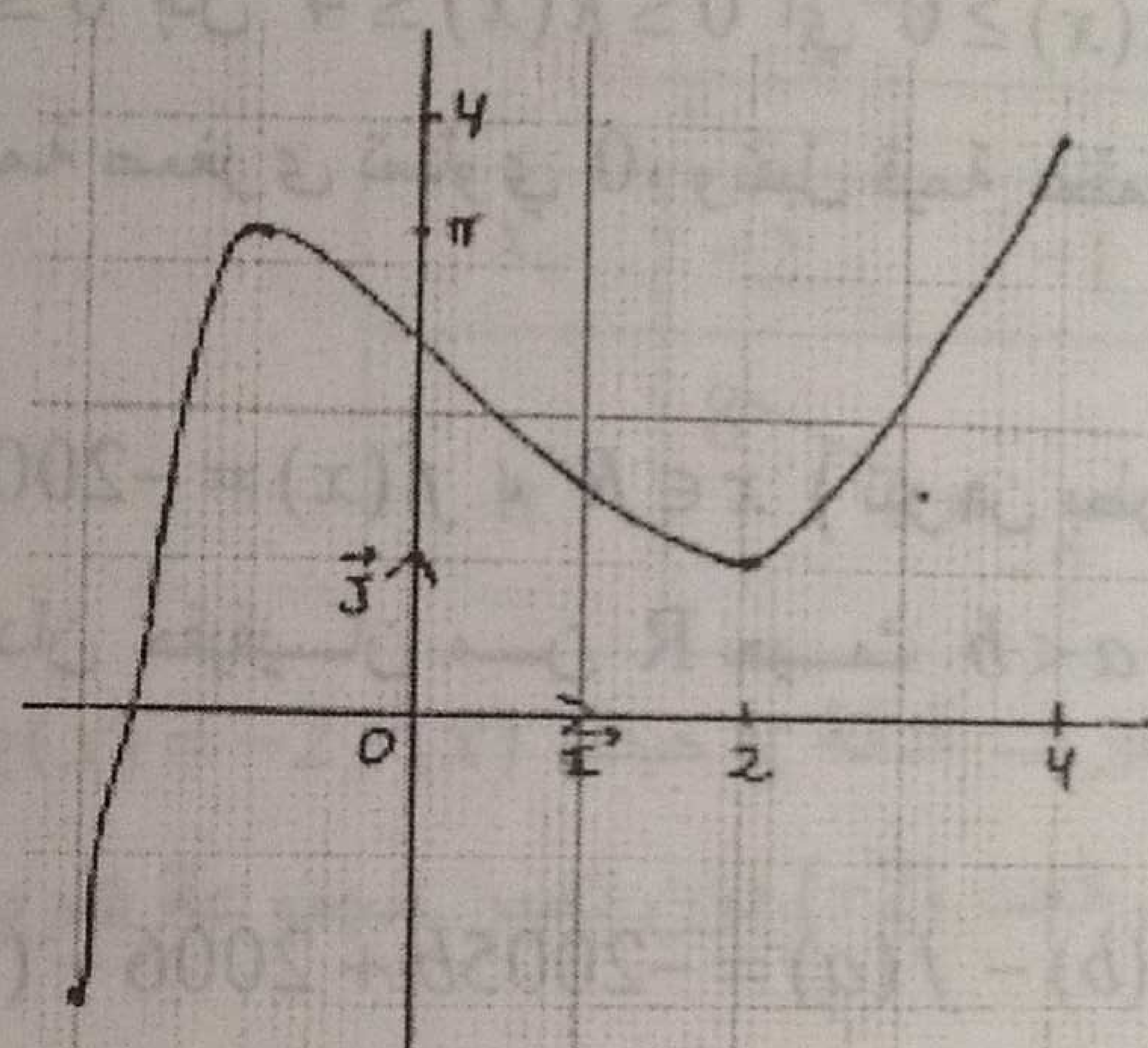
x	-2	$\frac{5}{2}$	6
f	↗	$\frac{53}{4}$	↘

حل التمرين 8: من خلال جدول بعض القيم ينتج جدول تغيرات الدالة f.

x	−2	−1	2	4
f	−2 ↗	π ↘	1 ↗	4

• القيمة العظمى للدالة f هي 4، والقيمة الصغرى للدالة f هي−2

إنشاء التمثيل البياني للدالة f على المجال [4 ;2−]. (يوجد تمثيل بياني آخر يطلب البحث عنه).



حل التمرين 9: f تقبل قيمة صغرى m=-4 معناه من أجل كل عنصر x من [a ;b] فإن $f(x)\geq -4$.

f تقبل قيمة عظمى M =2 معناه من أجل كل عنصر x من [a ;b] فإن $f(x)\leq 2$.

من المتباينتين السابقتين نجد : $-4\leq f(x)\leq 2$ .....(1)

• نضيف العدد 3+ إلى أطراف المتباينة (1) نجد :

$-1\leq f(x)+3\leq 5$ أي $-1\leq g(x)\leq 5$.

هذه المتباينة تعني $g(x)\geq -1$ و $g(x)\leq 5$ أي الدالة g تقبل قيمة صغرى تساوي (1-)، وتقبل قيمة عظمى تساوي 5.

* نضرب أطراف المتباينة (1) في العدد (2-) نجد :

$-4 \le -2f(x) \le 8$ أي $-4 \le h(x) \le 8$. هذه المتباينة تعني $h(x) \ge -4$

و $h(x) \le 8$ أي الدالة h تقبل قيمة صغرى (4-)،وتقبل قيمة عظمى تساوي

* لا يمكن تربيع أطراف المتباينة (1) لأن الطرف 4-سالب ولهذا نميز حالتين

الحالة الأولى: $0 \le f(x) \le 2$ معناه : $0 \le [f(x)]^2 \le 4$ أي $0 \le k(x) \le 4$

الحالة الثانية: $-2 \le f(x) \le 0$ معناه: $0 \le -f(x) \le 2$

$$0 \le [-f(x)]^2 \le 4$$

ومنه $0 \le [f(x)]^2 \le 4$ إذن $0 \le k(x) \le 4$ أي $k(x) \ge 0$ و $k(x) \le 4$

ومنه الدالة k تقبل قيمة صغرى تساوي 0، وتقبل قيمة عظمى تساوي 4.

<u>حل التمرين 10:</u>

لدينا : $f(x) = -2005x + 2006$ ، $x \in R$ (نبرهن بطريقتين مختلفتين)

ط1) ليكن a و b عددان حقيقيان من R حيث $a < b$. نحسب الفرق

$f(b) - f(a)$.

$$f(b) - f(a) = -2005b + 2006 - (-2005a + 2006)$$

$$= -2005b + 2005a = -2005(b - a)$$

بما أن $b - a > 0$ فإن $-2005(b-a) < 0$ أي $f(b) - f(a) < 0$ ومنه

$f(a) > f(b)$ ومنه الدالة f متناقصة على R.

ط2) نضرب طرفي المتباينة $a < b$ في العدد 2005- نجد

$$-2005a > -2005b$$

ثم نضيف إلى طرفي هذه المتباينة العدد 2006 نجد :

$$-2005a + 2006 > -2005b + 2006$$

أي $f(a) > f(b)$ وهذا معناه أن الدالة f متناقصة على R.

حل التمرين 11:

1) لإنشاء جدول تغيرات الدالة حيث $h(x)=f(x)-4$ نضيف إلى قيم الدالة f في الحالتين العدد (4−) دون تغير مجموعة تعريفعا أو اتجاه تغيرها

إذن جدول تغيرات الدالة h في الحالتين هو :

x	-2		3
h	-9	↗	-6

x	-2		-1		2		3
h	8	↘	-2	↗	-1	↘	-3

2) لإنشاء جدول تغيرات الدالة g حيث $g(x)=-2f(x)$. نضرب قيم الدالة f في الحالتين في العدد (2−) دون تغيير مجموعة تعريفها، لكن نغير من اتجاه تغيرها.

إذن جدول تغيرات الدالة g في الحالتين هو:

x	-2		3
g	10	↘	4

x	-2		-1		2		3
g	-24	↗	-4	↘	-6	↗	2

معارف:

1/ المعادلات في R:

تعريف : حل معادلة في R يعني إيجاد الأعداد الحقيقية التي تحقق المس

المقترحة . هذه الأعداد تسمى حلول المعادلة.

الخاصية 1: لا تتغير مجموعة حلول معادلة :

* إذا أضفنا نفس العدد الحقيقي إلى طرفي المساواة.

* إذا ضربنا طرفي المساواة في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم.

المعادلات المتكافئة :

تكون معادلتان معرفتان على نفس المجموعة متكافئتين إذا كانت لهما نف

مجموعة الحلول .

الخاصية 2: حل المعادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d)=0$ يعني د

المعادلتين .

$ax+b=0$ و $cx+d=0$.

تطبيق 1: حل في R المعادلة $(4x-5)(2-x)=0$

الحل :

$(4x-5)(2-x)=0$ معناه : $2-x=0$ أو $4x-5=0$

أي $x=2$ أو $x=\frac{5}{4}$ إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{\frac{5}{4}, 2\right\}$.

2/ المتراجحات في R :

الخاصية 3: لا تتغير مجموعة حلول متراجحة :

* إذا أضفنا نفس العدد الحقيقي إلى طرفي المتراجحة.

* إذا ضربنا طرفي المتراجحة في نفس العدد الحقيقي الموجب غير المعد

الخاصية 4:

إذا ضربنا طرفي متراجحة في نفس العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم فـإن اتجاه المتراجحة لا يتغير، وإذا ضربنا طرفي متراجحة في نفس العدد الحقيقي السالب غير المعدوم فإن اتجاه المتراجحة يتغير .

تطبيق 2:

حل في R المتراجحة $-4x+5\leq 17$

الحل :

$-4x+5\leq 17$ معناه : $-4x\leq 12$ أي $x\geq 3$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $[3\ ;+\infty[$.

ملاحظة :

* نسمي معادلة ذات مجهول حقيقي x من الدرجة الأولى كل معادلة من الشكل (أو يمكن كتابتها على الشكل) $ax+b=0$، حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$.

* نسمي متراجحة ذات مجهول حقيقي x من الدرجة الأولى كل متراجحة من الشكل (أو يمكن كتابتها على الشكل) $ax+b\geq 0$ أو $ax+b>0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b<0$)

حين a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$

إشارة $ax+b$ حيث $a\in R^*$ و $b\in R$

لدراسة إشارة $ax+b$ نميز حالتين : $a>0$ و $a>0$.

$a<0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	+	0	−

		$a>0$	
x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	$-$	0	$+$

✓ **الدالة التآلفية :** $f : x \mapsto ax+b$

إذا كان $a \neq 0$ فإن التمثيل البياني للدالة التآلفية هو عبارة عن مستقيم معادلته

$y = ax + b$

✓ **كتابة العبارة ax^2+bx+c على الشكل النموذجي $(a \neq 0)$**

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

هذه الكتابة الأخيرة تسمى الشكل النموذجي للعبارة المعطاة.

تطبيق :

$$2x^2+5x-7 = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right]$$

$$-3x^2+x-2 = -3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}\right]$$

✓ **استعمال المميز لحل المعادلة : $ax^2+bx+c=0$** $(a \neq 0)$

مميز هذه المعادلة هو العدد الحقيقي Δ حيث $\Delta = b^2-4ac$

1) إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

2) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = -\frac{b}{2a}$.

3) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقين متمايزين هما :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

تطبيق:

حل في R المعادلتين : $x^2+5x-6=0$ ، $2x^2+x+4=0$

الحل:

1) مميز المعادلة $x^2+5x-6=0$ هو $\Delta = 5^2-4(1)(-6) = 49$

إذن المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

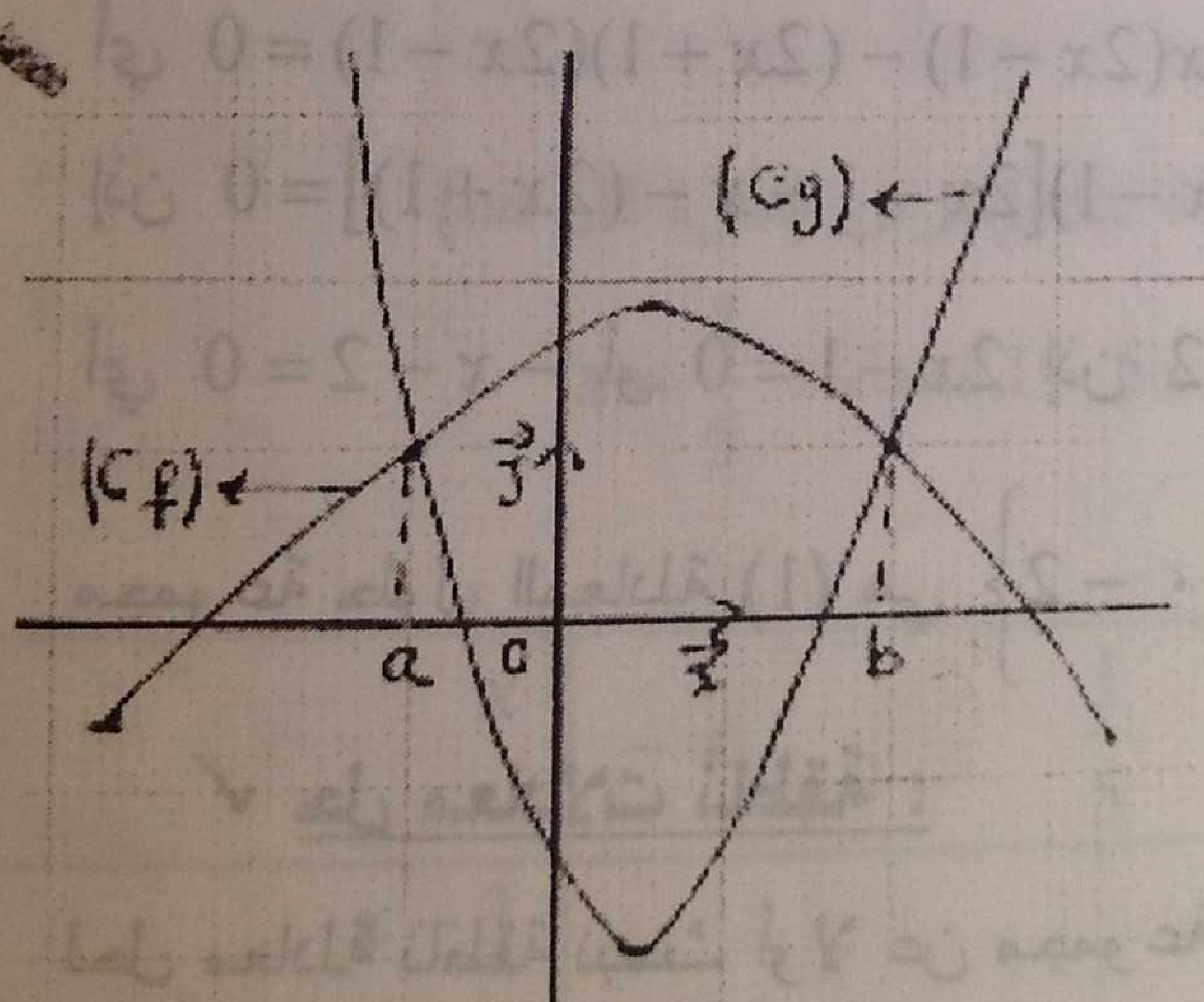
$$x_1 = \frac{-5+7}{2} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{-5-7}{2} = -6$$

2) مميز المعادلة $2x^2+x+4=0$ هو $\Delta = 1^2-4(2)(4) = -31$

إذن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في R.

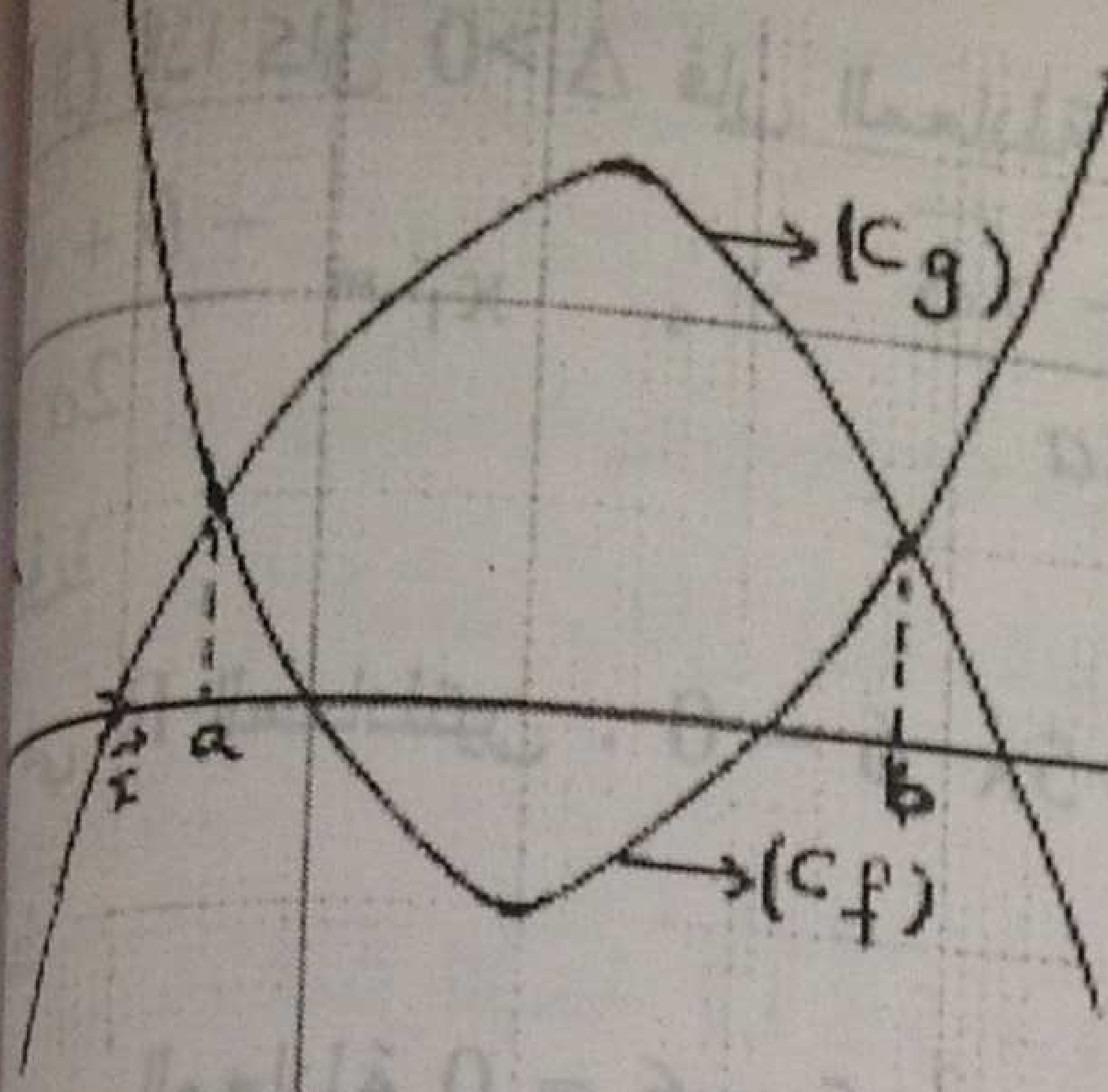
✓ **الحل البياني لمعادلة (متراجحة) :**

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب، في مستو منسوب إلى معلم $(0;\vec{I},\vec{J})$



• الحل البياني للمعادلة $f(x)=g(x)$ هي فواصل نقط تقاطع التمثلين البيانيين للدالتين f و g.

إذن حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ في هذا التمثيل البياني هما العددان a و b.



* الحـــل البيـــاني للمتراجحـــة $f(x)<g(x)$ ، هي الفواصل x التي تراتيبها بواسطة الدالة g أكبر تماما من تراتيبها بواسطة الدالة f

إذن الحل البياني للمتراجحة هو $]a\,;\,b[$

✓ حل معادلات من الدرجة الثانية أو أكبر :

لحل معادلة من الدرجة الثانية أو أكبر، نجعلها معادلة صفرية، ثم نحلل هذه العبارة إلى جداء قوسين أو أكثر ثم نستخدم الخاصية :

إذا كان $A\times B=0$ فإن A=0 أو B=0

تطبيق 3: حل في R المعادلة : $(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1 \ldots\ldots (1)$

الحل :

المعادلة (1) تكافئ : $(2x-1)^2+x(1-2x)-(4x^2-1)=0$

أي $(2x-1)^2-x(2x-1)-(2x+1)(2x-1)=0$

إذن $(2x-1)\left[2x-1-x-(2x+1)\right]=0$ ومنه $(2x-1)(-x-2)=0$

أي $-x-2=0$ أو $2x-1=0$ إذن $x=-2$ أو $x=\dfrac{1}{2}$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\left\{\dfrac{1}{2}،\ -2\right\}$

✓ حل معادلات ناطقة :

لحل معادلة ناطقة نبحث أولا عن مجموعة تعريف هذه المعادلة، ثم نجعلها معادلة صفرية (ننقل كل الحدود إلى طرف واحد) ثم نوحد المقامات، ونستخدم

الخاصية : إذا كان $B\neq 0$ فإن $\dfrac{A}{B}=0$ تكافئ A=0

حلول المعادلة $\frac{A}{B}=0$ هي الحلول التي تنتمي إلى مجموعة تعريفها.

تطبيق 4:

حل في المجموعة R المعادلة $\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$.

تكون المعادلة معرفة إذا كان $x+1\neq 0$ و $x\neq 0$ أي $x\neq -1$ و $x\neq 0$

أي معرفة على المجموعة $E=R-\{-1;0\}$

$\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$ معناه $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}=0$ أي $\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{2x}{x(x+1)}=0$

إذن $\frac{x+1-2x}{x(x+1)}=0$ و منه $\frac{-x+1}{x(x+1)}=0$ أي $-x+1=0$ إذن $x=1$

بما أن $1\in E$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $\{1\}$.

دراسة إشارة الجداء : $(ax+b)(cx+d)$:

تطبيق 5:

ادرس إشارة العبارة $(x-3)(1-5x)$ حسب قيم x حقيقة .

الحل :

نلاحظ أن كل حد هو من الشكل $ax+b$ (ندرس إشارة كل حد)

$x-3=0$ معناه : $x=3$ ، $1-5x=0$ معناه : $x=\frac{1}{5}$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(1-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>دراسة إشارة الحاصل</u> $\dfrac{ax+b}{cx+d}$:

<u>تطبيق 6:</u> أدرس إشارة العبارة $\dfrac{2x+2}{4-x}$ ، حسب قيم x الحقيقية .

<u>الحل :</u>

تكون العبارة $\dfrac{2x+2}{4-x}$ معرفة إذا كان $x \neq 4$ أي معرفة على $E = R - \{4\}$

<u>جدول الإشارة :</u>

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+2}{4-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

✓ **<u>حل متراجحة :</u>**

لحل متراجحة نجعلها متراجحة صفرية (أي تنقل كل الحدود إلى طرف واحد)، ثم نكتب العبارة على شكل جداء أو حاصل قسمة وندرس إشارتها في جدول الإشارة . نستنتج مجموعة حلول المتراجحة من السطر الأخير من الجدول .

<u>تطبيق 7:</u>

حل في R المتراجحة : $x \leq \dfrac{1}{x}$

<u>الحل :</u>

$x \leq \dfrac{1}{x}$ معناه : $x - \dfrac{1}{x} \leq 0$ أي $\dfrac{x^2-1}{x} \leq 0$ إذن $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty\,;\,-1]\cup]0\,;\,1]$

اختبر معلوماتك :

بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1) (-2) هو حل للمعادلة $2x-4=8$

2) إذا كان $-7x=0$ فإن $x=-7$.

3) حل المعادلة $(2x+5)^4=0$ هو $x=\dfrac{-5}{2}$.

4) يوجد عدد حقيقي أقل تماما من (-3) هو حل للمتراجحة $-5x<15$.

5) المعادلة $(4x-5)^2=(x+2)^2$ تكافئ المعادلة $4x-5=x+2$.

6) المتراجحة $(1-x)^2\leq(2x+3)^2$ تكافئ المتراجحة $1-x<2x+3$.

7) كل المعادلات التالية معرفة على R^*: $\dfrac{1}{x}=2x$ ، $\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{1}{x}$ ، $\dfrac{-4}{x}=x+3$

8) (-5) هو حل للمتراجحات التالية: $-7x>21$ ، $\dfrac{4}{3+x}\leq 2$ ، $x^2<x+1$

9) مجموعة حلول المتراجحة $2x\leq 4$ هي $]2\,;+\infty[$.

10) إذا كان $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{4}{9}$ فإن $4=x-1$.

التمارين

التمرين 1 :

لتكن $A(x)=(2x-1)(x-4)+(x^2-16)$ ، x عدد حقيقي.

1) انشر ثم بسط العبارة $A(x)$.

2) حلّل العبارة $A(x)$ ثم حل في R المعادلة $A(x)=0$.

3) حل في R المعادلة : $A(x)=-12$

التمرين 2 : حل في R المعادلات التالية :

$\frac{x}{3}=\frac{-x}{2}+4$ ، $\frac{2x+1}{2}=\frac{x-1}{3}$ ، $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+5}{6}+1$ ،

$x\sqrt{3}+5=3x\sqrt{3}-3$ ، $x^2+3x=2x^2-x$.

التمرين 3 : حل في R المتراجحات التالية :

$2x-3<-3x+8$ ، $4x-\frac{2}{3}\geq-\frac{x}{3}+2$ ، $x-\frac{1-4x}{3}<-2$ ،

$\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\leq-1$ ، $5-\frac{x}{4}\geq\frac{2x-1}{3}$

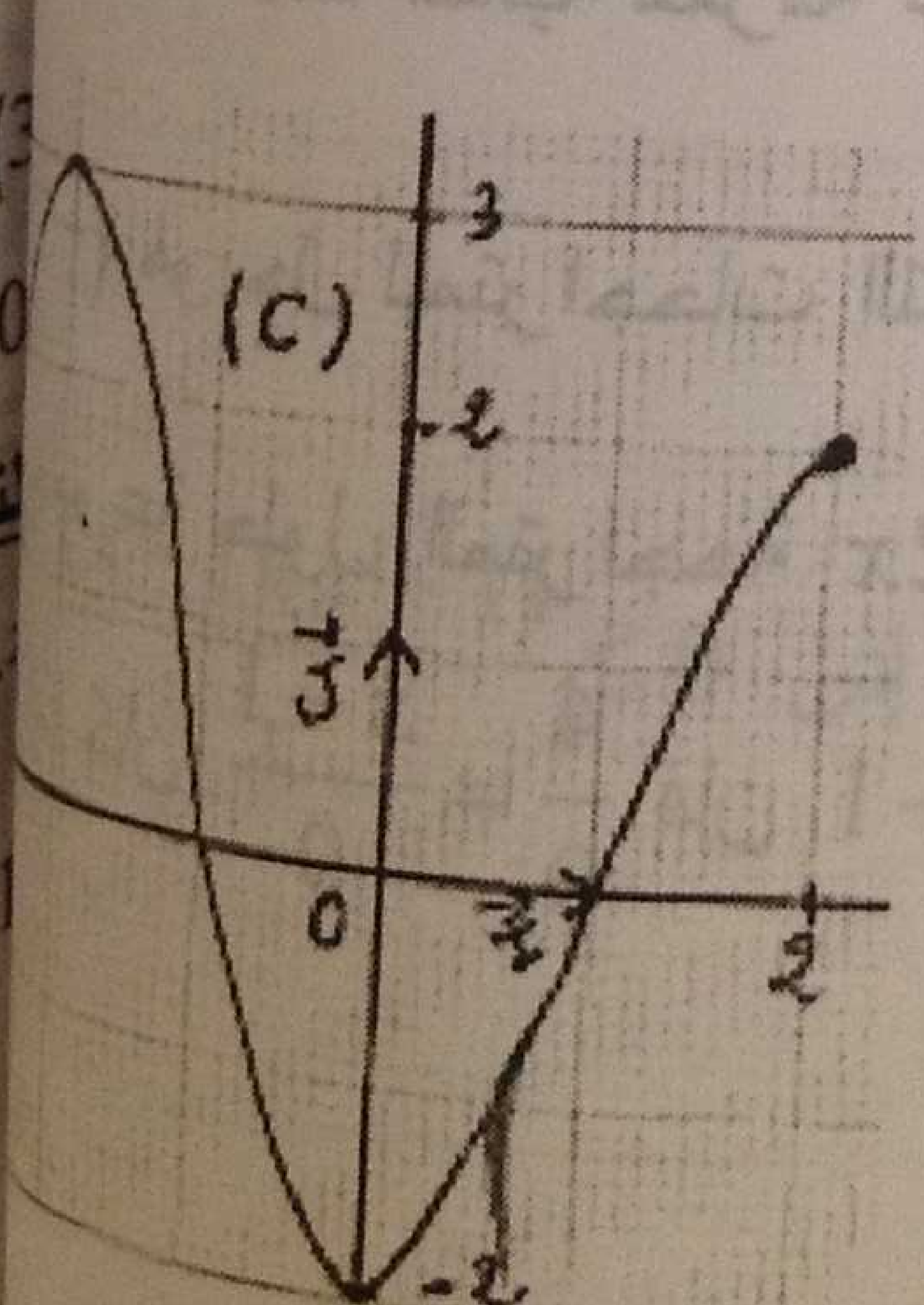
التمرين 4:

1) بيّن أن π هو حل للمعادلة : $x^2+(2-\pi)x-2\pi=0$.

2) بيّن أن $1+\sqrt{2}$ هو حل للمعادلة : $x^2-\sqrt{2}x-\left(1+\sqrt{2}\right)=0$.

التمرين 5:

يمثل الشكل التالي التمثيل البياني للدالة f.



* استنتج مجموعة تعريف الدالة f.

* هل الدالة f تقبل قيمة عظمى؟ قيمة صغرى ؟

* حل بيانيا المعادلات التالية :

$f(x)=0$ ، $f(x)=3$ ، $f(x)=2$ ، $f(x)=-2$

تمرين 6:

حل في R المتراجحات التالية (يطلب كتابة مجموعة الحلول على شكل مجالات) : $(2x+1)(5-x)\le 0$ ، $\frac{3+x}{2-x}\ge 0$ ، $x^2>5$ ، $\frac{1}{1+x}\ge 1-x$

تمرين 7: حل في R المعادلات التالية :

$x-2=\frac{5}{x+2}$ ، $\frac{(2x+3)(2-x)}{1-3x}=0$ ، $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=0$ ، $\frac{x^2-8}{x^2-x}=0$

تمرين 8:

z, y, x ثلاثة أعداد حقيقية تحقق : $z<y<x$.

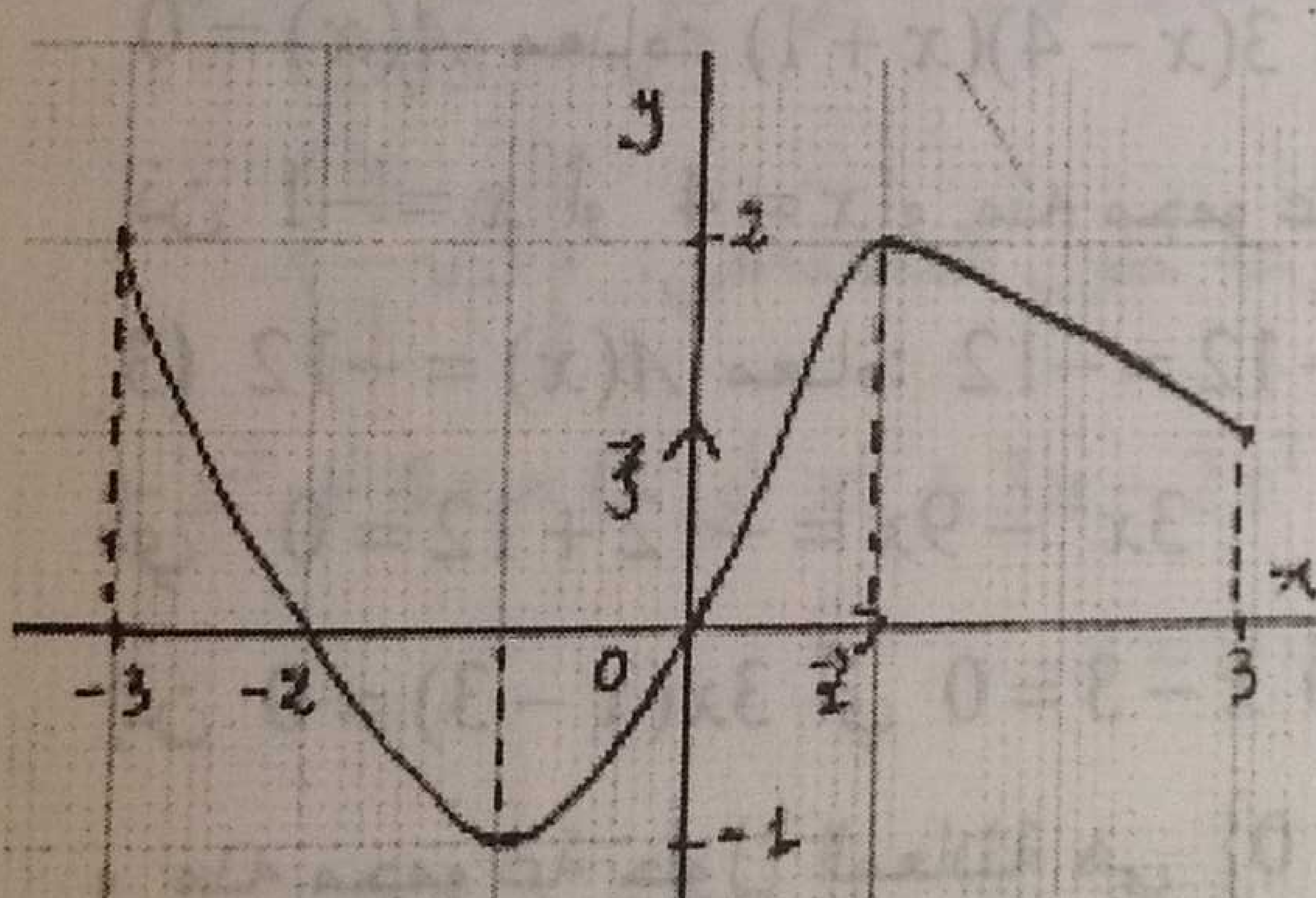
بحيث z يساوي الفرق بين x و y ، و x يساوي ثلاثة أضعاف العدد z .

1) عبّر عن y و z بدلالة x.

2) أحسب الأعداد الثلاثة x ،y، z بحيث يكون مجموعها يساوي 150.

3) أحسب الأعداد الثلاثة x ،y، z بحيث يكون $xz=y$

تمرين 9 : يمثل الشكل التالي التمثيل البياني للدالة f .



1) استنتج مجموعة تعريف الدالة f

2) عيّن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f.

3) حل بيانيا المتراجحات :

$f(x)<0$ ، $f(x)>0$ ، $f(x)\le 2$ ، $f(x)\ge -1$

تمرين 10 : حل في R المعادلات التالية.

$5x^2-2x=3x-7x^2$ ، $(2x^2-5x-6)^2=4(x^2+x+3)^2$

$9x^2=1$ ، $(\frac{2}{3}x-1)(3-5x)(\frac{-2}{5}x+1)=0$

التمرين 11 :

حل في R المتراجحات التالية (يطلب كتابة مجموعة الحلول على شكل مجالات)

$$6x < 3x^2 \text{ ، } x < \frac{2}{x} \text{ ، } \frac{9x^2}{4} \geq \frac{(x+1)^2}{9} \text{ ، } 4x^2 < 25$$

الحلول

حل التمرين 1 :

1)

$A(x) = (2x-1)(x-4) + (x^2-16) = 2x^2 - 8x - x + 4 + x^2 - 16$

$= 3x^2 - 9x - 12$

2)

$A(x) = (2x-1)(x-4) + (x-4)(x+4) = (x-4)[2x-1+x+4]$

$= (x-4)(3x+3) = 3(x-4)(x+1)$

$A(x)=0$ معناه: $3(x-4)(x+1)=0$ أي: $x+1=0$ أو $x-4=0$

إذن $x=-1$ أو $x=4$ و منه مجموعة حلول المعادلة هي: $\{-1 ، 4\}$

3) $A(x)=-12$ معناه: $3x^2-9x-12=-12$

أي $3x^2-9x=-12+12=0$

إذن $3x(x-3)=0$ أي $x-3=0$ أو $x=0$ إذن $x=3$ أو $x=0$

و منه مجموعة حلول المعادلة هي $\{0 ، 3\}$

حل التمرين 2:

لتسهيل حل المعادلات التي تحتوي على كسور نضرب طرفي المعادلة في نفس العدد لنتخلص من الكسر .

1) $4+\frac{-x}{2}=\frac{x}{3}$ معناه: $6(4+\frac{-x}{2})=6\times\frac{x}{3}$ أي. $24-3x=2x$

إذن $5x=24$ أي $x=\frac{24}{5}$ مجموعة حلول هذه المعادلة هي: $\left\{\frac{24}{5}\right\}$.

(2 $\frac{2x+1}{2}=\frac{x-1}{3}$ معناه: $6\times\frac{2x+1}{2}=6\times\frac{x-1}{3}$ أي

$6x+3=2x-2$

إذن $4x=-5$ أي $x=\frac{-5}{4}$. مجموعة حلول هذه المعادلةهي $\left\{\frac{-5}{4}\right\}$.

(3 $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+5}{6}+1$

معناه $6\times(\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3})=6\times(\frac{x+5}{6}+1)$

أي $3(x+3)-2(x-1)=x+5+6$ إذن $x+11=x+11$ و منه $0=0$

(محققة دوما)

و منه مجموعة حلول هذه المعادلة هي R.

(4 $x\sqrt{3}+5=3x\sqrt{3}-3$ معناه: $-2\sqrt{3}x=-8$ أي $x=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

و منه $x=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$. مجموعة حلول المعادلةهي: $\left\{\frac{4}{3}\sqrt{3}\right\}$.

(5 $x^2+3x=2x^2-x$ معناه: $x^2+3x-2x^2+x$ أي $-x^2+4x=0$

و منه $x(-x+4)=0$ إذن $x=4$ أو $x=0$.

مجموعة حلول المعادلة هي $\{4،0\}$.

حل التمرين 3:

لتسهيل حل المتراجحات التي تحتوي على كسور نضرب طرفي المتراجحة في

نفس العدد لنتخلص من الكسر.

(1 $2x-3<-3x+8$ معناه : $5x<11$ أي $x<\frac{11}{5}$.

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $\left]-\infty;\frac{11}{5}\right[$.

2) $4x-\frac{2}{3}\geq -\frac{x}{3}+2$ معناه : $3\left(4x-\frac{2}{3}\right)\geq 3\left(-\frac{x}{3}+2\right)$

أي $12x-2\geq -x+6$ إذن $13x\geq 8$ أي $x\geq \frac{8}{13}$

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $\left[\frac{8}{13};+\infty\right[$.

3) $x-\frac{1-4x}{3}<-2$ معناه: $3\left(x-\frac{1-4x}{3}\right)<3(-2)$ أي $\ldots 1+4x<-6$

إذن $7x<-5$ أي $x<\frac{-5}{7}$ مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $\ldots;\frac{-5}{7}\right[$

4) $\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\leq -1$ معناه: $\left(1-\sqrt{2}\right)x\leq -1-\sqrt{2}$ أي $\ldots\frac{-1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

إذن $x\geq \frac{-1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ أي $x\geq 3+2\sqrt{2}$.

ومنه مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $\left[3+2\sqrt{2};+\infty\right[$.

5) $5-\frac{x}{4}\geq \frac{2x-1}{3}$ معناه: $12\left(5-\frac{x}{4}\right)\geq 12\times\frac{2x-1}{3}$

أي $60-3x\geq 8x-4$ إذن $-11x\geq -64$ أي $x\leq \frac{64}{11}$

ومنه مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $\left]-\infty;\frac{64}{11}\right]$

حل التمرين 4:

1) نعوض π في المعادلة إذا حققها فهو حل لها.

$$\ldots\pi)x-2\pi=\pi^2+(2-\pi)\pi-2\pi=\pi^2+2\pi-\pi^2-2\pi=0$$

بما أن المعادلة محققة من أجل $x=\pi$ فإن π هو حل لها.

2) $x^2-\sqrt{2}x-(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})$

$=1+2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}-2-1-\sqrt{2}=0$

بما أن المعادلة محققة من أجل $x=1+\sqrt{2}$ فإن $1+\sqrt{2}$ هو حل لها.

التمرين 5:

- الدالة f معرفة على المجال $[-3;2]$.
- الدالة f تقبل قيمة عظمى تساوي 3، وقيمة صغرى تساوي 2-.
- حل المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يعني إيجاد فواصل نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة f مع محور الفواصل وهي 1، 1-، 3-.
- حل المعادلة $f(x)=3$ بيانيا يعني إيجاد فواصل نقط تقاطع المنحني (c) مع المستقيم ذي المعادلة $y=3$ وهي 2- .
- حل المعادلة $f(x)=2$ بيانيا يعني إيجاد فواصل نقط تقاطع المنحني (c) مع المستقيم ذي المعادلة $y=2$ وهي 2، 1,5- ، 2,5-
- حل المعادلة $f(x)=-2$ بيانيا يعني إيجاد فواصل نقط تقاطع المنحني (c) مع المستقيم ذي المعادلة $y=-2$ وهي 0.

حل التمرين 6:

1) $(2x+1)(5-x)\leq 0$

$5-x=0$ معناه: $x=5$ ، $2x+1=0$ معناه: $x=\frac{-1}{2}$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$5-x$	$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+1)(5-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\right[$

2) $\frac{3+x}{2-x}\geq 0$

$3+x=0$ معناه: $x=-3$ ، $2-x=0$ معناه: $x=2$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{3+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $\left[-3;2\right[$

3) $x^2>5$ معناه: $x^2-5>0$ أي $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)>0$

$x-\sqrt{5}=0$ معناه: $x=\sqrt{5}$ ، $x+\sqrt{5}=0$ معناه : $x=-\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $\left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5};+\infty\right[$

4) $\frac{1}{1+x}\geq 1-x$ معناه: $\frac{1}{1+x}-(1-x)\geq 0$ أي $\frac{1-1+x^2}{1+x}\geq 0$

$\frac{x^2}{1+x}\geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $]-1 \text{ ، } +\infty[$

حل التمرين 7:

1) $\dfrac{5}{x+2} = x-2$ المعادلة معرفة على $R-\{-2\}$

$\dfrac{5}{x+2} = x-2$ معناه: $x-2-\dfrac{5}{x+2}=0$ أي $\dfrac{x^2-4-5}{x+2}=0$ إذن

$\dfrac{x^2-9}{x+2}=0$.

$x^2-9=0$ معناه: $(x-3)(x+3)=0$ إذن $x=-3$ أو $x=3$.

ومنه مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-3 \text{، } 3\}$.

2) $\dfrac{(2x+3)(2-x)}{1-3x}=0$. المعادلة معرفة على $R-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

المعادلة (2) تعني $(2x+3)(2-x)=0$ أي $2-x=0$ أو $2x+3=0$

إذن $x=2$ أو $x=\dfrac{-3}{2}$ مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{\dfrac{-3}{2} \text{ ، } 2\right\}$.

3) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}=0$. $x^2-1=0$ معناه: $(x+1)(x-1)=0$ أي

$x=-1$ أو $x=1$

إذن المعادلة معرفة على

$E=R-\{-1;1\}$

$x^2+2x+1=0$ معناه : $(x+1)^2=0$ أي $x+1=0$ ومنه $x=-1$

بما أن $-1 \notin E$ فإن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في R.

4) $\frac{x^2-8}{x^2-x}$. $x^2-x=0$ معناه: $x(x-1)=0$ أي $x=1$ أو $x=0$.

إذن المعادلة معرفة على $E=R-\{0;1\}$

$\frac{x^2-8}{x^2-x}=0$ معناه: $x^2-8=0$ أي $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$ إذن

$x=2\sqrt{2}$ أو $x=-2\sqrt{2}$

بما أن $2\sqrt{2} \in E$ و $-2\sqrt{2} \in E$ فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-2\sqrt{2}، 2\sqrt{2}\}$.

حل التمرين 8:

لدينا $z=x-y$ ، $x=3z$ ، $z<y<x$.

1) $x=3z$ معناه: $z=\frac{1}{3}x$ $\quad y=x-z=x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$

2) حساب الأعداد x ، y ، z حيث $x+y+z=150$

$x+y+z=150$ معناه: $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x=150$ أي $2x=150$

إذن $x=\frac{150}{2}=75$ ومنه $z=\frac{1}{3}\times 75=25$ ، $y=\frac{2}{3}\times 75=50$.

3) $xz=y$ معناه: $(x)\left(\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x$ أي $\frac{1}{3}x^2=\frac{2}{3}x$ إذن

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x=0$$

أي $\frac{1}{3}x(x-2)=0$ ومنه $x-2=0$ أو $x=0$ إذن $x=2$ أو $x=0$

* إذا كان $x=0$ فإن $y=\frac{2}{3}\times 0=0$ و $z=\frac{1}{3}\times 0=0$ (هذه القيم مرفوضة)

* إذا كان $x=2$ فإن $y=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$ و $z=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

حل التمرين 9:

1) مجموعة تعريف الدالة f هي $[-3;3]$.

2) القيمة العظمى للدالة f هي 2، والقيمة الصغرى للدالة f هي 1-.

3) حل المتراجحة $f(x)<0$ بيانيا يعني إيجاد الفواصل x من $[-3;3]$ والتي تراتيبها $f(x)$ سالبة وغير معدومة وهي $[-2;0]$.

• حل المتراجحة $f(x)>0$ بيانيا يعني إيجاد الفواصل x من $[-3;3]$ والتي تراتيبها $f(x)$.
موجبة وغير معدومة وهي $[-3;-2[\cup]0;3]$

• حل المتراجحة $f(x)\le 2$ بيانيا يعني إيجاد الفواصل x من $[-3;3]$ والتي تراتيبها $f(x)$ أصغر من أو تساوي 2 وهي $[-3;3]$ (لأن $f(1)$ قيمة عظمى).

• حل المتراجحة $f(x)\ge -1$ بيانيا يعني إيجاد الفواصل x من $[-3;3]$ والتي تراتيبها $f(x)$ أكبر من أو تساوي 1- وهي $[-3;3]$ (لأن 1- قيمة صغرى)

حل التمرين 10:

1) $5x^2-2x=3x-7x^2$ معناه: $5x^2-2x-3x+7x^2=0$ أي $12x^2-5x=0$ إذن $x(12x-5)=0$ أي $12x-5=0$ أو $x=0$ ومنه $x=\frac{5}{12}$ أو $x=0$ مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{5}{12}،0\right\}$

2) $(2x^2-5x-6)^2=4(x^2+x+3)^2$ معناه:
$(2x^2-5x-6)^2-(2(x^2+x+3))^2=0$
أي $[2x^2-5x-6+2(x^2+x+3)][2x^2-5x-6-2(x^2+x+3)]=0$
إذن $(4x^2-3x)(-7x-12)=0$ أي $-x(4x-3)(7x+12)=0$

ومنه $7x+12=0$ أو $4x-3=0$ أو $-x=0$ إذن $x=\frac{-12}{7}$ أو $x=\frac{3}{4}$ أو $x=0$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{\frac{-12}{7}، \frac{3}{4}، 0\right\}$.

3) $9x^2=1$ معناه: $9x^2-1=0$ أي $(3x+1)(3x-1)=0$

إذن $x=\frac{1}{3}$ أو $x=\frac{-1}{3}$ مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{\frac{-1}{3}، \frac{1}{3}\right\}$

4) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3-5x)\left(\frac{-2}{5}x+1\right)=0$ معناه: $\frac{-2}{5}x+1=0$ أو

$3-5x=0$ أو $\frac{2}{3}x-1=0$ أي $x=\frac{5}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$ أو $x=\frac{3}{5}$

مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{\frac{3}{2}، \frac{3}{5}، \frac{5}{2}\right\}$.

حل التمرين 11:

1) $4x^2\le 25$ معناه: $4x^2-25\le 0$ أي $(2x+5)(2x-5)\le 0$

$2x+5=0$ معناه: $x=\frac{-5}{2}$ ، $2x-5=0$ معناه: $x=\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+5)(2x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $\left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right]$

2) $\frac{9x^2}{4}\ge\frac{(x+1)^2}{9}$ معناه : $81x^2\ge 4(x+1)^2$ أي

إذن $[9x+2(x+1)][9x-2(x+1)]\ge 0$ أي $(11x+2)(7x-2)\ge 0$

$7x-2=0$ معناه: $x=\frac{2}{7}$ ، $11x+2=0$ معناه : $x=\frac{-2}{11}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{11}$		$\frac{2}{7}$		$+\infty$
$11x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(11x+2)(7x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $\left]-\infty;\frac{-2}{11}\right]\cup\left[\frac{2}{7};+\infty\right[$

3) $x<\frac{2}{x}$ معناه: $x-\frac{2}{x}<0$ ، أي $\frac{x^2-2}{x}<0$ إذن $\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}<0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]0;\sqrt{2}[$

4) $6x<3x^2$ معناه: $6x-3x^2<0$ أي $3x(2-x)<0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ينتج أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

6 الدوال المرجعية

معارف:

نسبة تزايد دالة : نسمي النسبة $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ نسبة تزايد الدالة f بين

العددين الحقيقيين المختلفين x_1 و x_2

1) الدوال التآلفية:

تعريف1 : نسمي دالة تآلفية f معرفة على R كل دالة تكتب على الشكل

$f(x)=ax+b$ حيث a و b ثابتان حقيقيان .

تطبيق1 :

- الدالة المعرفة على R : $f:x\to\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{3}$ هي دالة تآلفية .
- الدالة المعرفة على R : $f:x\to-2x^2+7$ هي دالة ليست تآلفية.

ملاحظة: (اتجاه تغير الدالة التآلفية) .

- إذا كان $a>0$ فإن الدالة f متزايدة على R.
- إذا كان $a<0$ فإن الدالة f متناقصة على R.
- إذا كان $a=0$ فإن الدالة f ثابتة على R.
- إذا كان $b=0$ فإن الدالة f تسمى دالة خطية.

التمثيل البياني :

التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث $f(x)=ax+b$ هو مستقيم.

و a معامل توجيهه.

الخاصية1 : إذا x_1 و x_2 عدادان حقيقيان و f دالة تآلفية فإن $f(x_2)-f(x_1)$

متناسب مع x_2-x_1 أي $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$

2) الدالة مربع:

تعريف2: الدالة مربع هي دالة f معرفة على R كما يلي: $f(x)=x^2$

اتجاه التغير و التمثيل البياني للدالة مربع:

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ أي $b-a>0$

$$f(b)-f(a)=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$$

- إذا كان $a\geq 0$ و $b>0$ فإن $a+b>0$ أي $f(b)-f(a)>0$

إذن $f(a)<f(b)$

- إذا كان $a<0$ و $b\leq 0$ فإن $a+b<0$ أي $f(b)-f(a)<0$

إذن $f(a)>f(b)$.

و منه f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;0]$.

الدالة f تقبل قيمة صغرى هي $f(0)=0$.

من أجل x يؤول إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

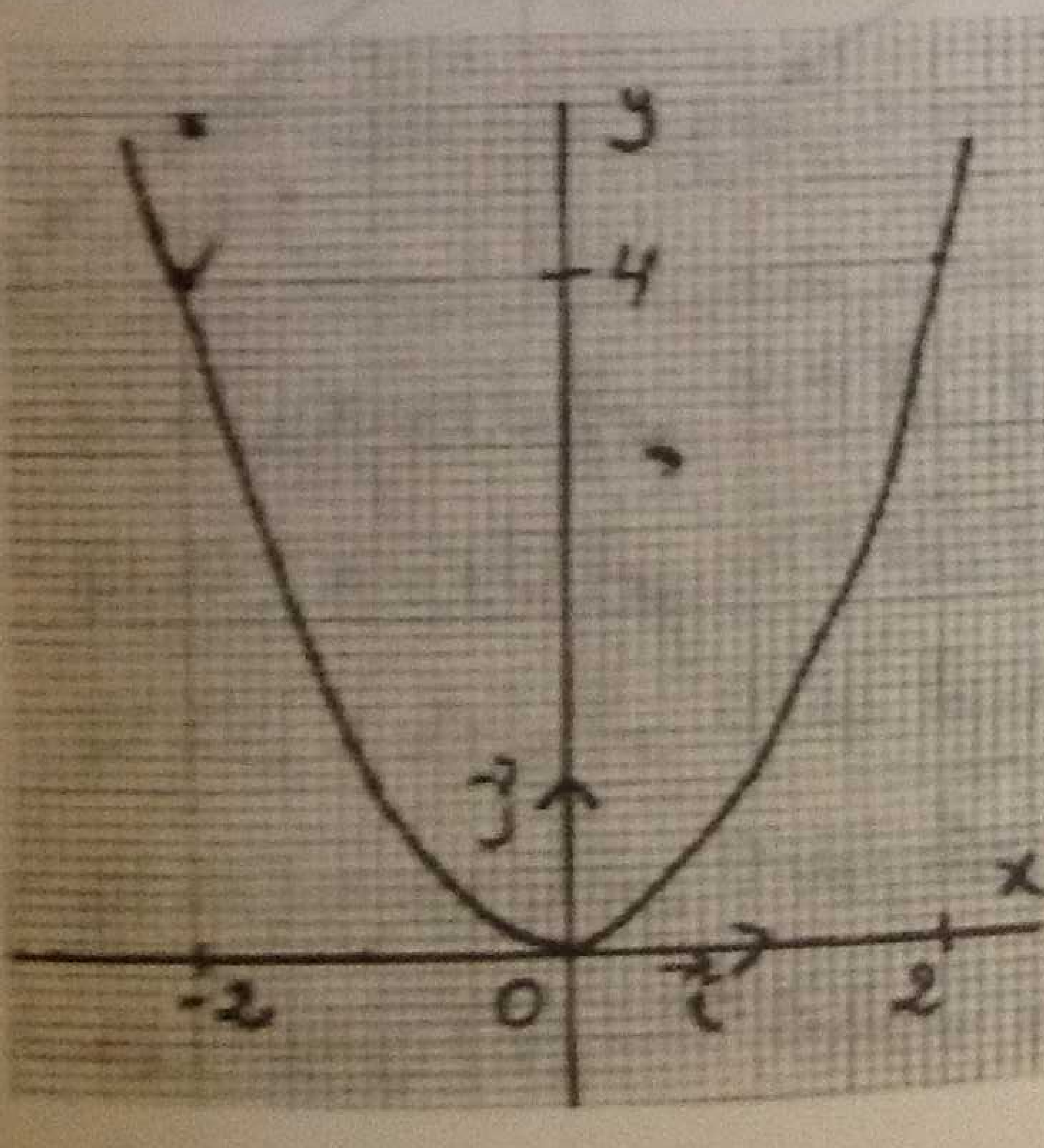
ومن أجل x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $-\infty$

التمثيل البياني (C) للدالة f يسمى قطعا مكافئا.

ملاحظة : محور التراتيب هو محـــور تناظر للتمثيل البياني (C) للدالة مربع.



3) **الدالة مقلوب :**

تعريف3 : نسمي دالة المقلوب الدالة f المعرفة على R^* كما يلي $f(x)=\frac{1}{x}$.

اتجاه التغير والتمثيل البياني لدالة المقلوب :

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ أي $b-a>0$

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}=-\frac{b-a}{ab}$$

- إذا كان $a>0$ و $b>0$ فإن $ab>0$ أي $\frac{1}{ab}>0$ إذن $-\frac{b-a}{ab}<0$

أي $f(b)-f(a)<0$ و منه $f(a)>f(b)$.

إذا كان $a<0$ و $b<0$ أي $-a>0$ و $-b>0$ إذن $ab>0$ أي $-\frac{b-a}{ab}<0$

أي $f(b)-f(a)<0$ و منه $f(a)>f(b)$

إذن f متناقصة على R_+^* و على R_-^*

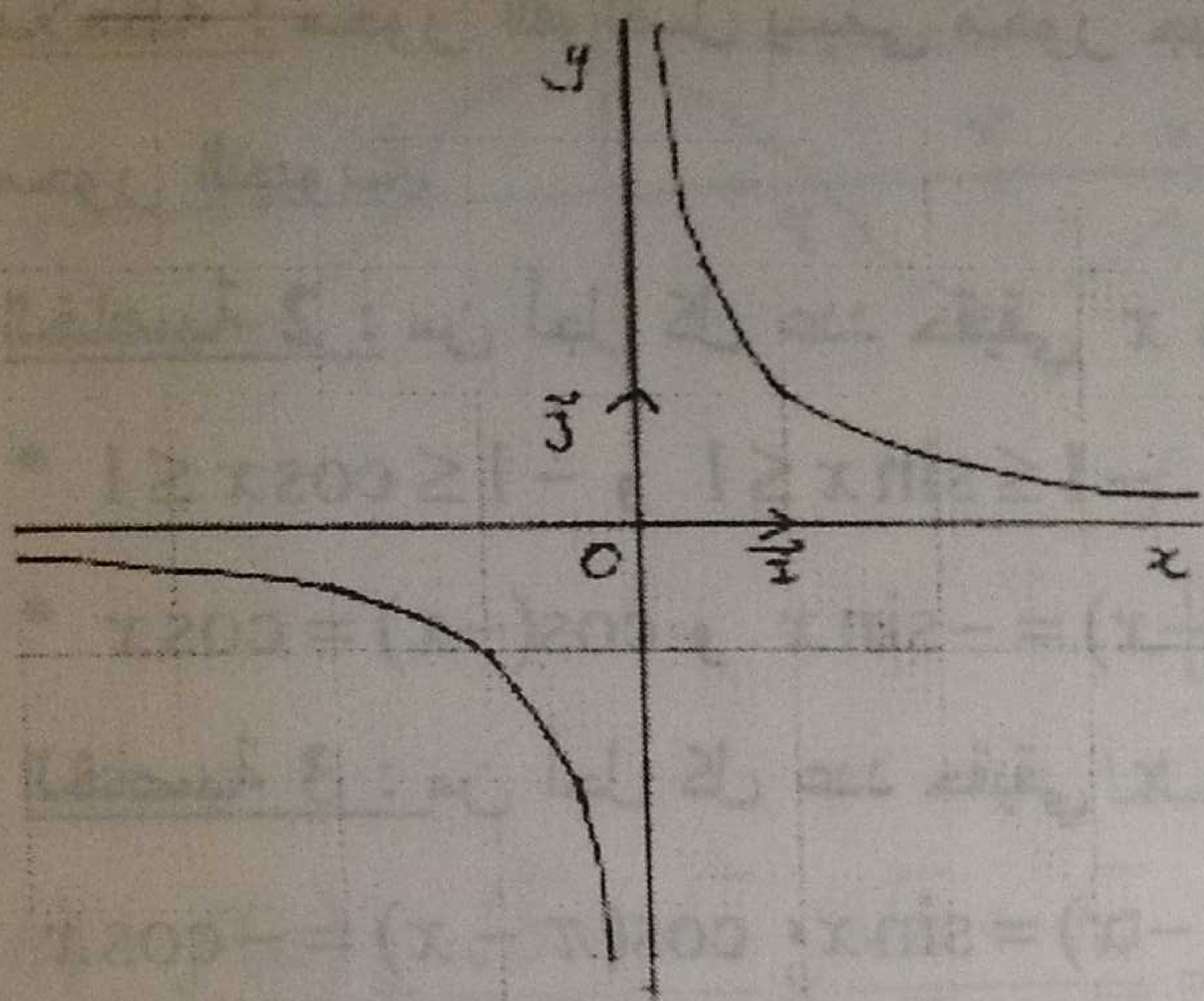
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 0	

- إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى 0
- إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى 0
- إذا كان x يؤول إلى 0 بقيم أصغر فإن $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$
- إذا كان x يؤول إلى 0 بقيم أكبر فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

التمثيل البياني (C) لدالة المقلوب يسمى قطعا زائدا.

ملاحظة: مبدأ المعلم 0 هو مركز تناظر للتمثيل البياني (C) الممثل لدالة المقلوب.



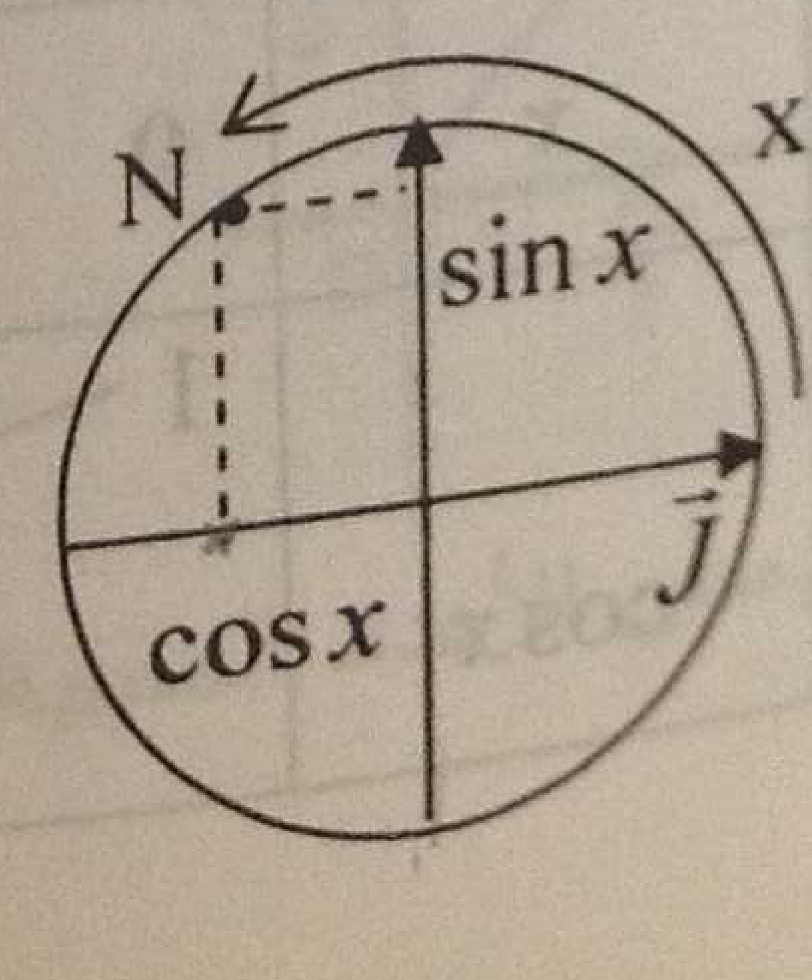
4) دالة الجيب تمام – دالة الجيب:

الدائرة المثلثية: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{I},\vec{J})$.

تعريف4 : الدائرة الموجهة (C) التي مركزها 0 و نصف قطرها 1 ، تسمى الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $(O,\vec{I},\vec{J})$

تعريف5 : ليكن N نقطة من الدائرة المثلثية (C) المرفقة بالمعلم $(O,\vec{I},\vec{J})$ و x عدد حقيقي.

- نسمي جيب تمام العدد الحقيقي x فاصلة النقطة N و نرمز إليه بالرمز $\cos x$.
- نسمي جيب العدد الحقيقي x ترتيب النقطة N و نرمز إليه بالرمز $\sin x$.
- الدالة المعرفة على R كما يلي: $x \mapsto \cos x$. تسمى دالة جيب التمام .
- الدالة المعرفة على R كما يلي: $x \mapsto \sin x$ تسمى دالة الجيب.



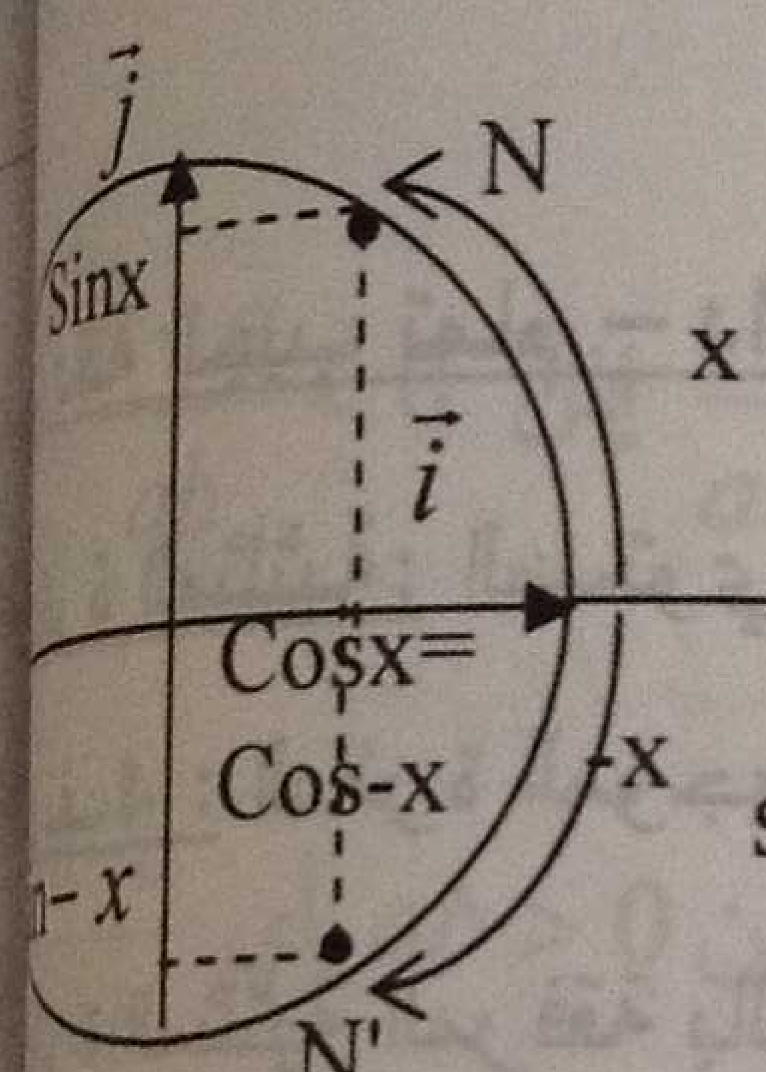
ملاحظة : محور الفواصل يسمى محور جيوب التمام، ومحور التراتيب يسمى محور الجيوب.

الخاصية 2 : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

* $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$

* $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

الخاصية 3 : من أجل كل عدد حقيقي x و كل عدد صحيح K .



$$\sin(\pi - x) = \sin x ، \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x ، \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x ، \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x ، \cos(x + 2K\pi) = \cos x$$

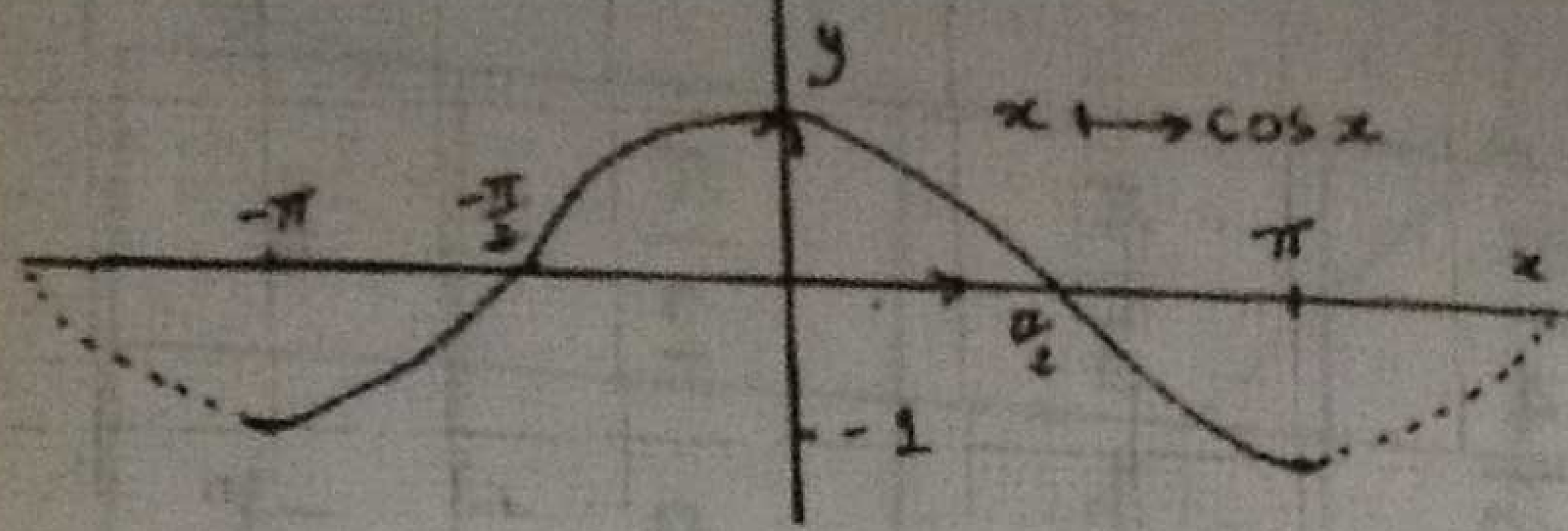
$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x ، \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$$

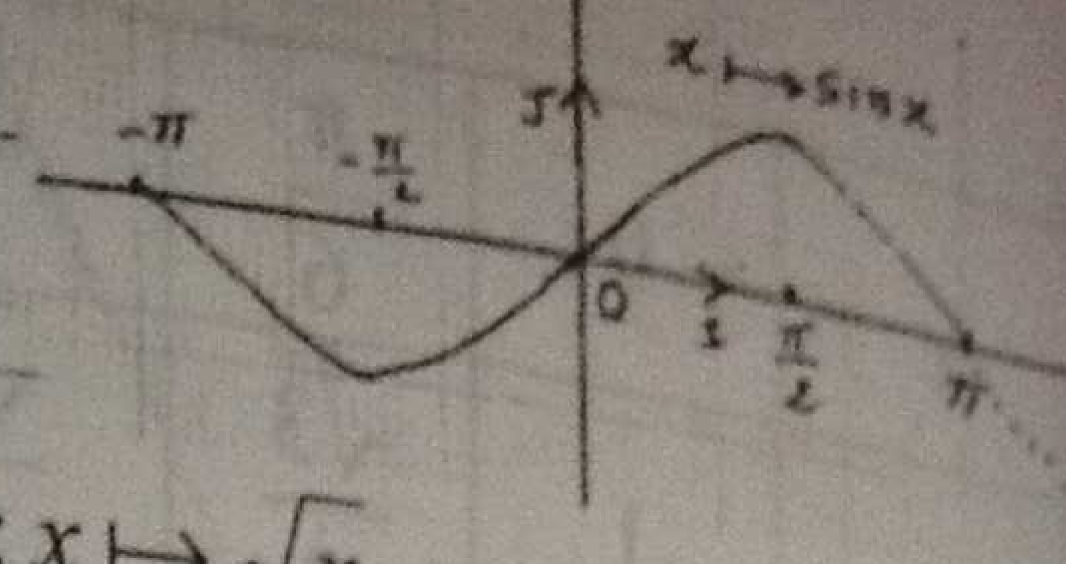
دراسة اتجاه تغير دالتي الجيب تمام على المجال $[0;\pi]$ وإنشاء تمثيلها البياني

جدولي تغيرات الدالتين : $x \mapsto \cos x$ ، $\mapsto \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0	↘ -1





5) **دالة الجذر التربيعي:** $f : x \mapsto \sqrt{x}$:

الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

ليكن a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}\times\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{(b-a)(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

بما أن $a>0$ و $b>0$ فإن $\sqrt{a}>0$ و $\sqrt{b}>0$ أي $\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$

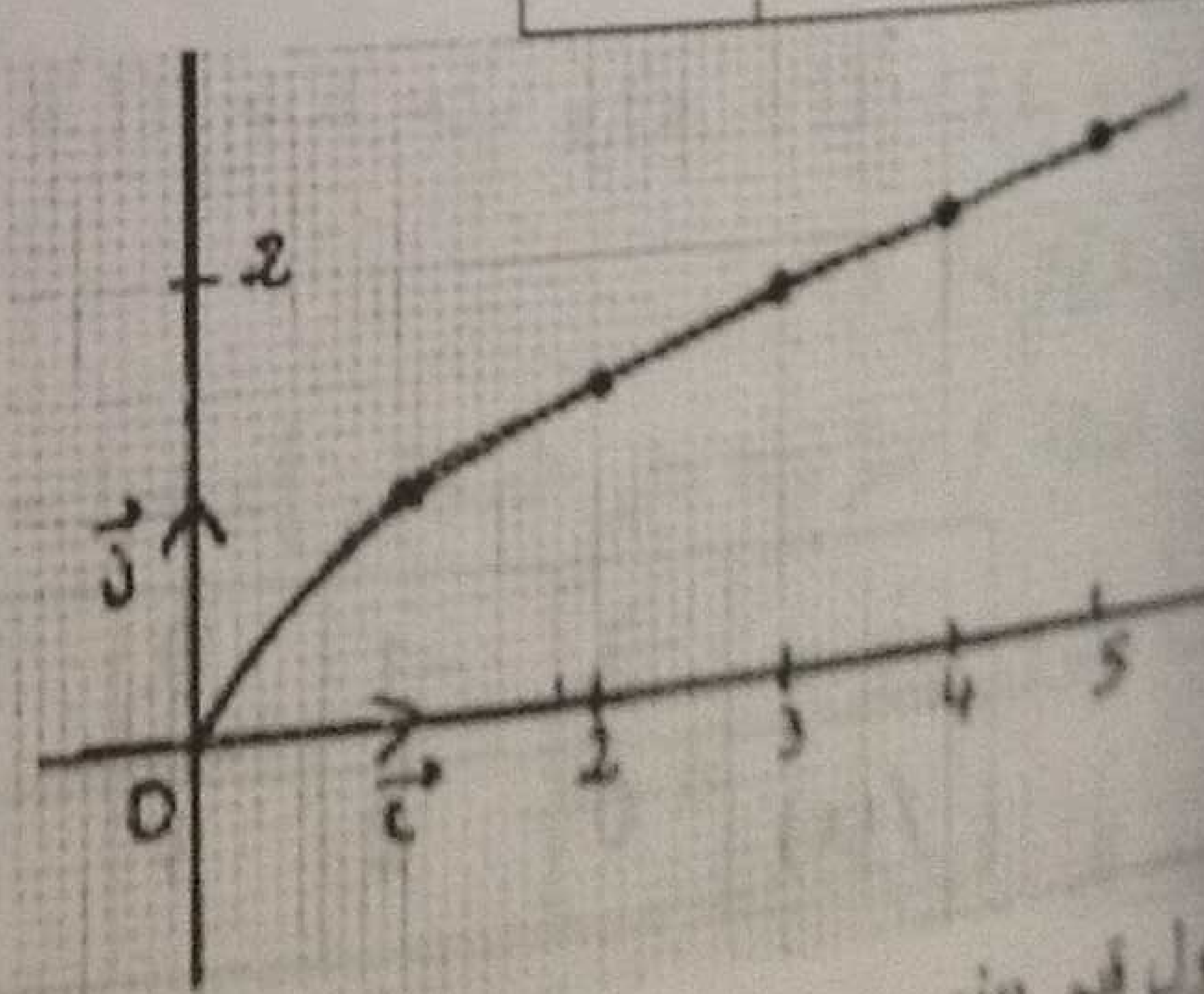
إذن : $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}>0$

ومنه : f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$

من أجل x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$



جدول قيم sin، cos، tan بعض الأعداد الحقيقية :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

التمثيل البياني لدالة تآلفية على شكل قطع:

إذا كانت عبارة الدالة التآلفية (ليست معطاة على شكل عبارة واحدة) معطاة على الشكل :

$$\begin{cases} f(x)=a_1x+b_1, x\in I_1 \\ f(x)=a_2x+b_2, x\in I_2 \\ f(x)=\dots\dots\dots \end{cases}$$

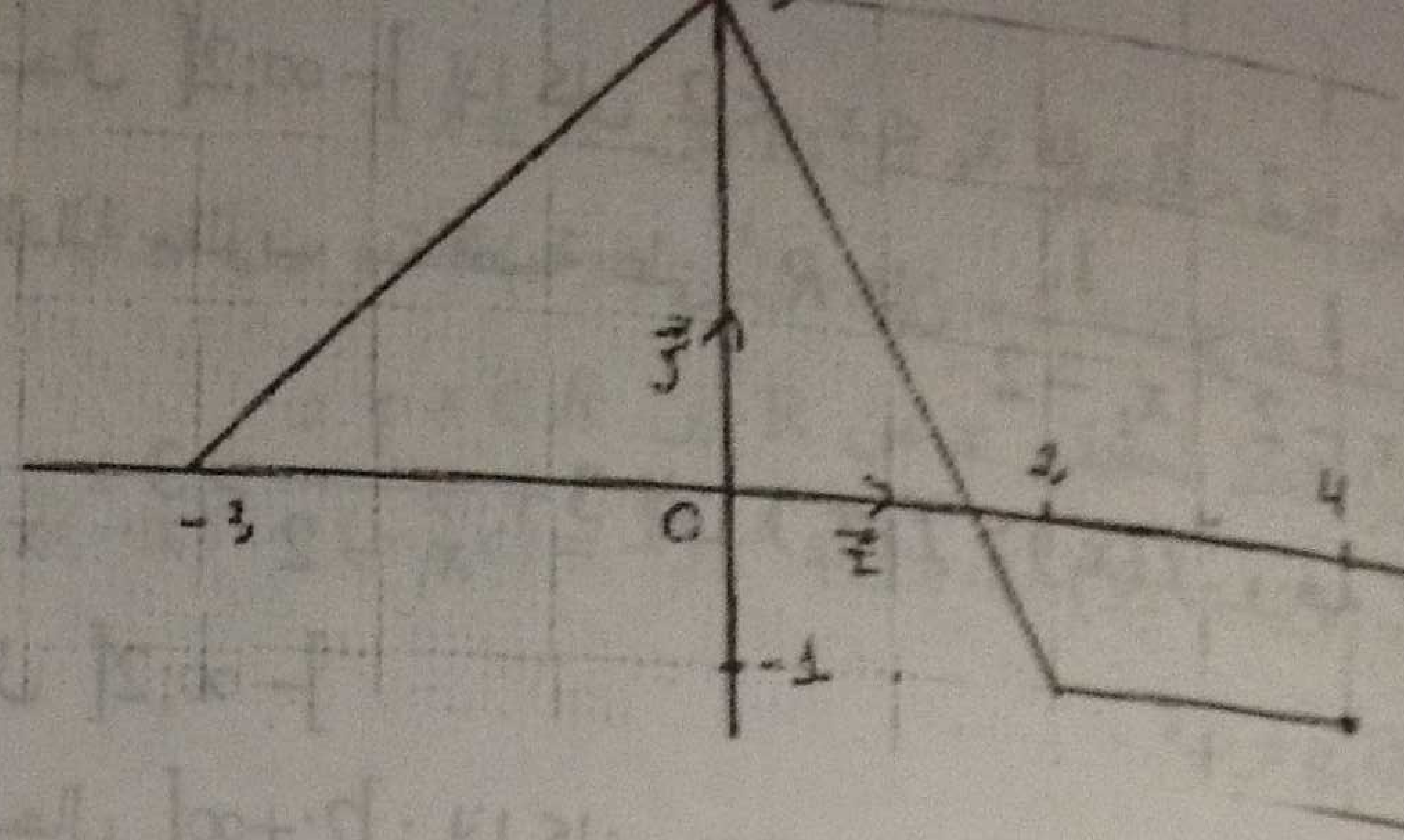
فإننا نرسم على كل مجال تعريف دالة جزء من مستقيم الممثل لتلك الدالة.

تطبيق 2 : أنشىء التمثيل البياني للدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x+3; x\in[-3;0] \\ f(x)=-2x+3; x\in[0;2] \\ f(x)=-1; x\in[2;4] \end{cases}$$

الحل:

x	-3	-1	0	1	2	4
$f(x)$	0	2	3	1	-1	-1



دراسة الدوال من الشكل : $f(x)=(x+a)^2+b$:

تطبيق 3:

أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على R كما يلي: $f(x)=(x+1)^2+4$

الحل:

• على المجال $]-\infty;-1]$: إذا كان $x_1<x_2\le -1$ فإن $x_1+1<x_2+1\le 0$

أي $-(x_1+1)\ge -(x_2+1)\ge 0$ إذن $(x_1+1)^2>(x_2+1)^2\ge 0$

أي $(x_1+1)^2+4>(x_2+1)^2+4$ إذن $f(x_1)>f(x_2)$

و منه الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

• على المجال $[-1;+\infty[$: إذا كان $-1\le x_1<x_2$ فإن $0\le x_1+1<x_2+1$

أي $(x_1+1)^2<(x_2+1)^2$ و منه $(x_1+1)^2+4<(x_2+1)^2+4$

إذن $f(x_1)<f(x_2)$.

و منه الدالة f متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$.

دراسة الدوال الشكل : $f(x)=a+\dfrac{1}{x+b}$

تطبيق 4:

أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $R-\{2\}$ كمايلي: $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$

الحل :

* على المجال $]-\infty;2[$ إذا كان $x_1 < x_2 < 2$ فإن $x_2 - 2 < 0$ ...

و بما أن الدالة مقلوب متناقصة على R_-^* فإن $\frac{1}{x_1-2} > \frac{1}{x_2-2}$

أي $3+\frac{1}{x_1-2} > 3+\frac{1}{x_2-2}$ إذن $f(x_1) > f(x_2)$. و فيه f متناق

على المجال $]-\infty;2[$

- على المجال $]2;+\infty[$: إذا كان $2 < x_1 < x_2$ فإن $x_1 - 2 < x_2 - 2$

و بما أن الدالة مقلوب متناقصة على R_+^* فإن $\frac{1}{x_1-2} > \frac{1}{x_2-2}$

أي $3+\frac{1}{x_1-2} > 3+\frac{1}{x_2-2}$ إذن $f(x_1) > f(x_2)$. و منه f متناق

على المجال $]2;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	‖	↘

الدوال الزوجية و الدوال الفردية: f دالة معرفة على مجال E من R

- تكون الدالة f زوجية إذا كان من أجل كل عنصر x من E فإن :

$-x \in E$ و $f(-x) = f(x)$

- تكون الدالة f فردية إذا كان من أجل كل عنصر x من E فإن :

$-x \in E$ و $f(-x) = -f(x)$

تطبيق5: f و g دالتان معرفتان على R كما يلي: $f(x) = 2x^2 + 5$

$g(x) = 3x^3 - 2x$

هل الدالة f زوجية ؟ هل الدالة g فردية.

لدينا: من أجل كل العدد الحقيقي x من R فإن $-x \in R$

و $f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$ ، و منه الدالة f زوجية.

من أجل كل العدد الحقيقي x من R فإن $-x \in R$ و

$g(-x) = 3(-x)^3 - (-2x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -g(x)$.

و منه الدالة g فردية .

الدوال الدورية:

f دالة معرفة على E، T عدد حقيقي غير معدوم. يكون العدد T دورا للدالة f

إذا كان من أجل كل عنصر x من E فإن $x+T$ عنصر من E

و $f(x+T) = f(x)$.

التفسير البياني: إذا كان T دورا للدالة f و (C) تمثيلها البياني فإن كل نقط (C)

التي فواصلها $x + Tk$ ، $k \in Z$ لها نفس الترتيب $f(x)$.ولرسم المنحني (C)

يكفي رسمه في مجال طوله T ، ثم إتمامه بانسحابات أشعتها $TK\vec{i}$.

ملاحظة:

الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ دوريتان و دور كل منهما 2π

مقارنة دالتين:

لتكن f و g دالتين. للمقارنة بين الدالتين f و g نحسب الفرق $f(x) - g(x)$

ثم نبسطه (إن أمكن) و ندرس إشارته باستعمال جدول الإشارة.

تمرين محلول: بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1) إذا كان $x \geq 1$ فإن $x^2 \geq 1$.

2) إذا كان $0 < a < b$ فإن $\cos a < \cos b$

3) إذا كان $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ فإن $\sin\pi = 2$.

4) كل الجمل التالية صحيحة : $\cos 2\pi = 2\cos\pi$ ، $\cos(-x) = \cos x$

$\cos\frac{\pi}{6} > 0$

5) إذا كان $a<\sqrt{b}$ فإن $5-2a>5-2\sqrt{b}$

6) إذا كان $\cos x = 0{,}4$ فإن $\sin x = 0{,}6$

7) إذا f دالة مربع فإن $f(a+b)=f(a)+f(b)$

8) من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $-2\le\cos\le 2$ ، $\sin 2x = 2\sin x$

9) إذا كانت f دالة تآلفية فإن: $f(a)+f(b)=f(a)+f(b)$.

a ، b عددان حقيقيان .

10) إذا كان $a^2+1\le b-2$ فإن $\frac{1}{a^2+1}\ge\frac{1}{b-2}$

التمارين

التمرين 1:

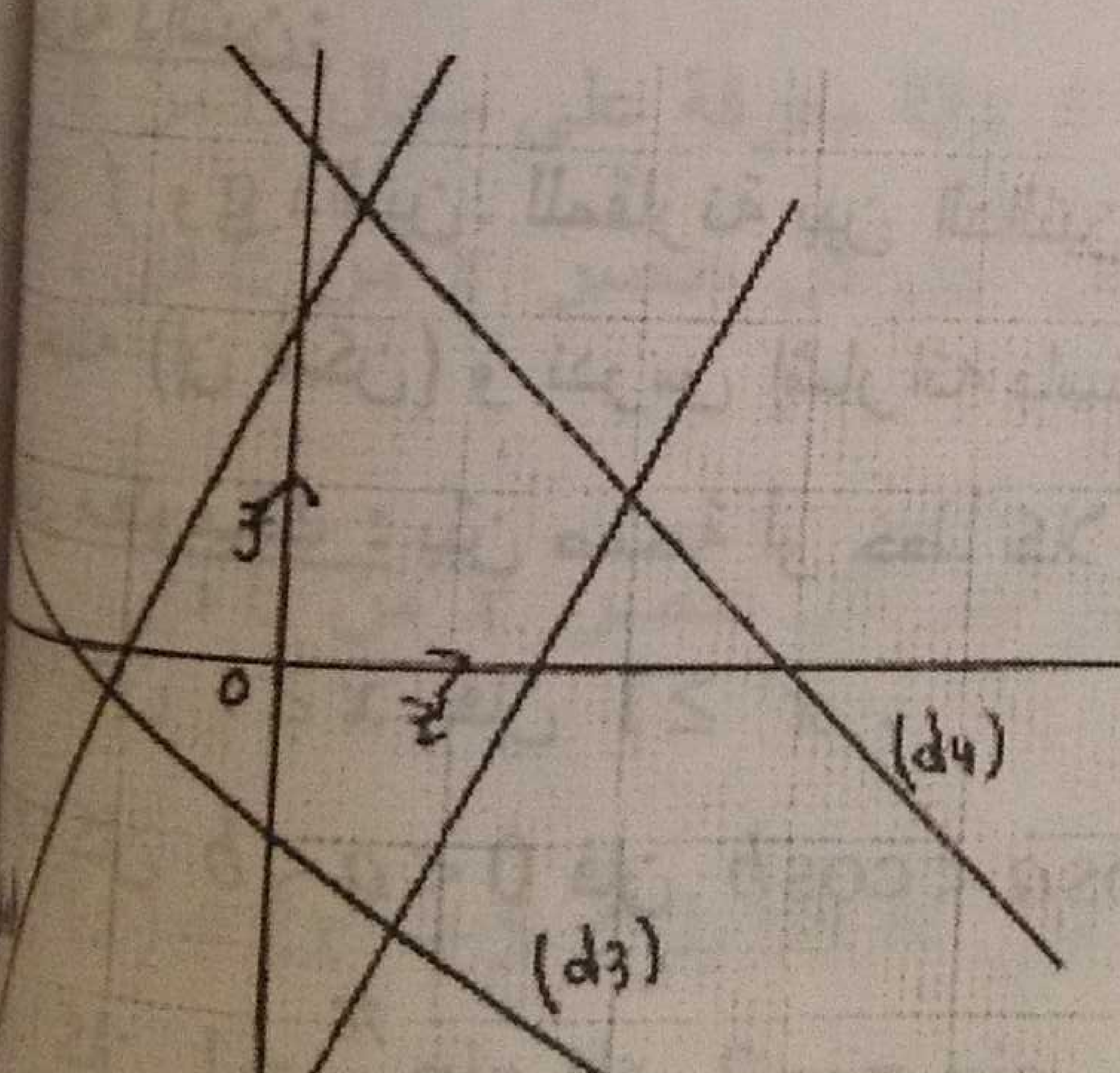
f دالة تآلفية . عين عبارة $f(x)$ في كل حالة مما يلي:

1) $f(0)=1$ و $f(1)=3$ 2) $f(-1)=-2$ ، $f(-2)=3$

3) $f(\sqrt{2})=3$ و $f(2)=9$.

التمرين 2:

(d_1) ، (d_2) ، (d_3) ، (d_4) هـي تمثيلات بيانية لأربع دوال تآلفية . عيّن في كل حالة عبارة الدالة التآلفية $f(x)$.



التمرين 3: x عدد حقيقي ينتمي إلى المجال I. عيّن (إن أمكن) المجال الذي ينتمي إليه مقلوب x

1) $I=[3;5]$ 2) $I=[-5;-3]$ 3) $I=[-2;6]$ 4) $I=]-\infty;1]$

التمرين 4:

f، g، h، k أربع دوال تآلفية . أكمل الجداول التالية دون حساب عبارات الدوال .(المطلوب حساب x_3 ، g(3) ، h(1000) ، k(6).

x	1,5	2	
f(x)	3	5	9

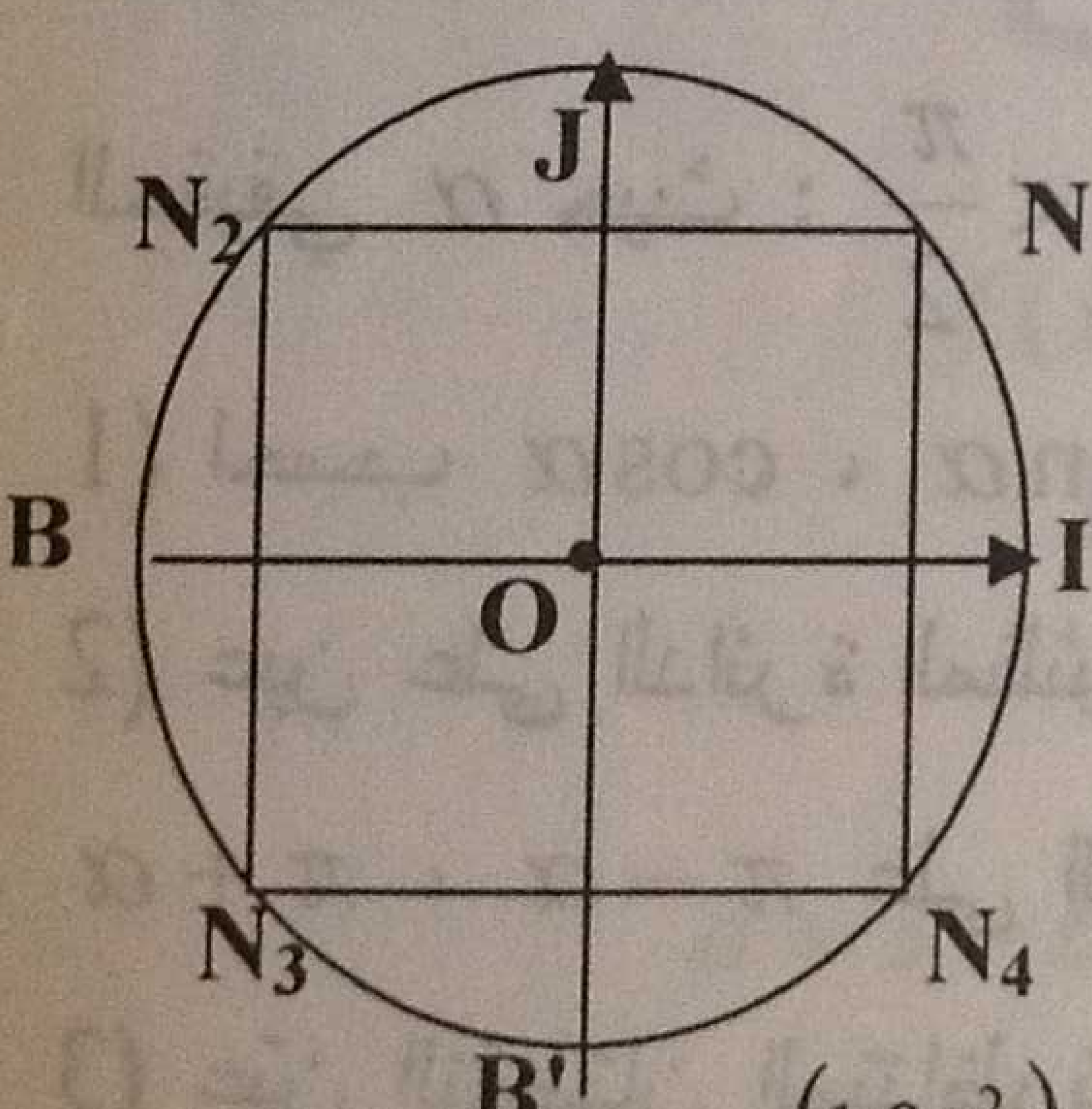
x	1	2	3
g(x)	3	5	

x	10	100	1000
h(x)	1	3	

x	0	3	6
k(x)	1	2	

التمرين 5:

لتكن N_1، N_2، N_3، N_4 أربع نقط من دائرة مثلثية (C) بحيث يكون الرباعي $N_1N_2N_3N_4$ مربع و $(N_1N_2)//(OI)$



1) عين الأعداد الحقيقية x التي صورها النقط I ، N_4، N_3، N_2، N_1، J، B، B' على الدائرية المثلثية.

2) احسب $\cos x$ و $\sin x$ في كل حالة بقيم دقيقة .

3) احسب $\cos x$ و $\sin x$ في كل حالة بقيم تقريبية (10^{-2})

التمرين 6: f دالة معرفة على R كما يلي: $f(x)=|3x-5|-1$

1) برهن أن الدالة f تكتب على الشكل :

$$\begin{cases} f(x)=-3x+4\,;\,x\leq\dfrac{5}{3} \\ f(x)=3x-6\,;\,x\geq\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

2) أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة f ثم استنتج القيمة الصغرى للدالة f.

3) باستعمال التمثيل البياني (C) استنتج مجموعة حلول المتراجحة :

$$|3x-5|-1\le 2$$

التمرين 7:

ادرس اتجاه تغيير كل من الدالتين المعرفتين كما يلي:

$$g(x)=-2-\frac{1}{x+1} \text{ ، } f(x)=3+\frac{1}{x-5}$$

التمرين 8: f ، g ، h ثلاث دوال تآلفية .

1) إذا علمت أن $\frac{f(9)-f(3)}{9-3}=1$ و $f(5)=6$ احسب $f(2005)$

2) إذا علمت أن $\frac{g(\sqrt{2})-g(1)}{\sqrt{2}-1}$ و $g(2)=5$ احسب $g(2,003)$

3) إذا علمت أن $\frac{h(3)-h(1)}{2}=2$ و $h(1)=5$ احسب $h(1+\sqrt{2})$.

التمرين 9: لتكن N نقطة من الدائرة المثلثية فاصلتها 0,5 صورة العد

الحقيقي α حيث : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1) احسب $\cos\alpha$ ، $\sin\alpha$.

2) عين على الدائرة المثلثية النقط N_1 ، N_2 ، N_3 صور الأعداد $-\alpha$ ، $\pi+\alpha$ ، $\pi-\alpha$ على الترتيب . ماهي طبيعة الرباعي $NN_1N_2N_3$؟

3) عيّن النقطتان المتناظرتان بالنسبة إلى المبدأ O ، والنقطتان المتناظرتا

بالنسبة إلى محور الجيوب أو محور جيوب التمام .

4) استنتج قيم جيوب وجيوب تمام الأعداد: $-\alpha$ ، $\pi+\alpha$ ، $\pi-\alpha$ بدلا

$\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

التمرين 10: f دالة معرفة على R كما يلي : $f(x)=x^2+4x-5$.

1) بيّن أن $(x+2)^2-9=(x-1)(x+5)$

2) بين أن الدالة f يمكن التعبير عنها باستعمال الدالة التآلفية و الدالة مربع،

مثلات الشكل.

3) استخدم الشكل المناسب، وادرس اتجاه تغير الدالة f.

التمرين 11:

ادرس في كل حالة الدالة f إن كانت زوجية أم فردية.

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x^4+\dfrac{1}{x^4}$

2) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x+2\sin x$

3) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x^2+5x-1$

4) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x\cos x$

5) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

الحلول

حل التمرين 1:

نعلم أن الدالة التآلفية نكتب على الشكل : $f(x)=ax+b$

ولتعين الدالة f يكفي تعين العددين الحقيقيين a و b.

1) $f(0)=1$ معناه: $a\times 0+b=1$ أي $b=1$.

$f(1)=3$ معناه : $a+b=3$ أي $a=3-b=3-1=2$

ومنه $f(x)=2x+1$

2) $f(-1)=-2$ معناه: $-a+b=-2$ أي $b=a-2$ (نعوض قيمة b)

$f(-2)=3$ معناه: $-2a+b=3$ أي $-2a+a-2=3$ إذن

$-a-2=3$ أي $a=-5$ ومنه $b=-7$ أي $f(x)=-5x-7$

3) $f(\sqrt{2})=3$ معناه: $\sqrt{2}a+b=3$ أي $b=3-\sqrt{2}a$ (نعوض قيمة b).

$f(2)=9$ معناه: $2a+b=9$ أي $2a+3-\sqrt{2}a=9$ إذن: $(2-\sqrt{2})a=6$

ومنه $a=\frac{6}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3\left(2+\sqrt{2}\right)$ إذن

$$b=3-3\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=-3-6\sqrt{2}$$

ومنه $f(x)=3\left(2+\sqrt{2}\right)x-3-6\sqrt{2}$

حل التمرين 2:

نعلم أن نقطة تقاطع بيان الدالة التآلفية مع محور الفواصل هي $\left(\frac{-b}{a};0\right)$

مع محور التراتيب هي $M_2(0;b)$.

* (d_1) هو التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x)=2x+2$
* (d_2) هو التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x)=2x-3$
* (d_3) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث $f(x)=\frac{-2}{3}x-1$
* (d_4) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f حيث $f(x)=-x+3$

حل التمرين 3:

1) $3\le x\le 5$ معناه: $\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{3}$ أي $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]$

2) $-5\le x\le -3$ معناه: $3\le -x\le 5$ أي $\frac{1}{5}\le\frac{-1}{x}\le\frac{1}{3}$

إذن $\frac{-1}{3}\le\frac{1}{x}\le\frac{-1}{5}$ ومنه $\frac{1}{x}\in\left[\frac{-1}{3};\frac{-1}{5}\right]$

3) $0<x\le 6$ معناه: $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{6}$ أي $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{6};+\infty\right[$

$-2\le x<0$ معناه: $0<-x\le 2$ أي: $\frac{-1}{x}\ge\frac{1}{2}$ إذن: $\frac{1}{x}\le-\frac{1}{2}$

أي $\frac{1}{x}\in\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right[$ وعليه يكون $\frac{1}{x}\in\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{6};+\infty\right[$

4) $0 < x \leq 1$ معناه: $\frac{1}{x} \geq 1$ أي $\frac{1}{x} \in [1;+\infty[$

$x < 0$ معناه: $\frac{1}{x} < 0$ أي $\frac{1}{x} \in]-\infty;0[$

وعليه يكون $\frac{1}{x} \in]-\infty;0[\cup [1;+\infty[$.

حل التمرين 4:

نعلم أنه إذا كانت f دالة تآلفية، و x_1، x_2 عددان حقيقيان مختلفان فإن $f(x_2)-f(x_1)$ متناسب مع $x_2 - x_1$ أي $f(x_2)-f(x_1) = a(x_2 - x_1)$

إذن $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (هذه النسبة تسمى نسبة تزايد دالة).

1) نحسب a من القيم المعطاة: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{2-1,5} = \frac{2}{0,5} = 4$.

$f(x_3)-f(x_2) = 4(x_3 - x_2)$ معناه: $9-5 = 4(x_3 - 2)$

أي $4 = 4x_3 - 8$ إذن $4x_3 = 12$ ومنه $x_3 = \frac{12}{4} = 3$.

2) لدينا $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{2-1} = 2$

$g(x_3)-g(x_2) = 2(x_3 - x_2)$ معناه: $g(3)-5 = 2(3-2)$

أي $g(3)-5 = 2$ إذن $g(3) = 2+5 = 7$

3) $\frac{h(100)-h(10)}{100-10} = \frac{3-1}{90} = \frac{1}{45}$.

$h(1000)-h(100) = \frac{1}{45}(1000-100)$ معناه: $h(1000)-3 = \frac{900}{45}$

إذن:

$$h(1000) = \frac{900}{45} + 3 = 20 + 3 = 23$$

4) بنفس الطريقة السابقة نجد: $k(6) = 3$

حل التمرين 5:

النقط	I	N_1	J	N_2	B	N_3	B'	N_4
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	0,70	0	-0,70	-1	-0,70	0	0,70
$\sin x$	0	0,70	1	0,70	0	-0,70	-1	-0,70

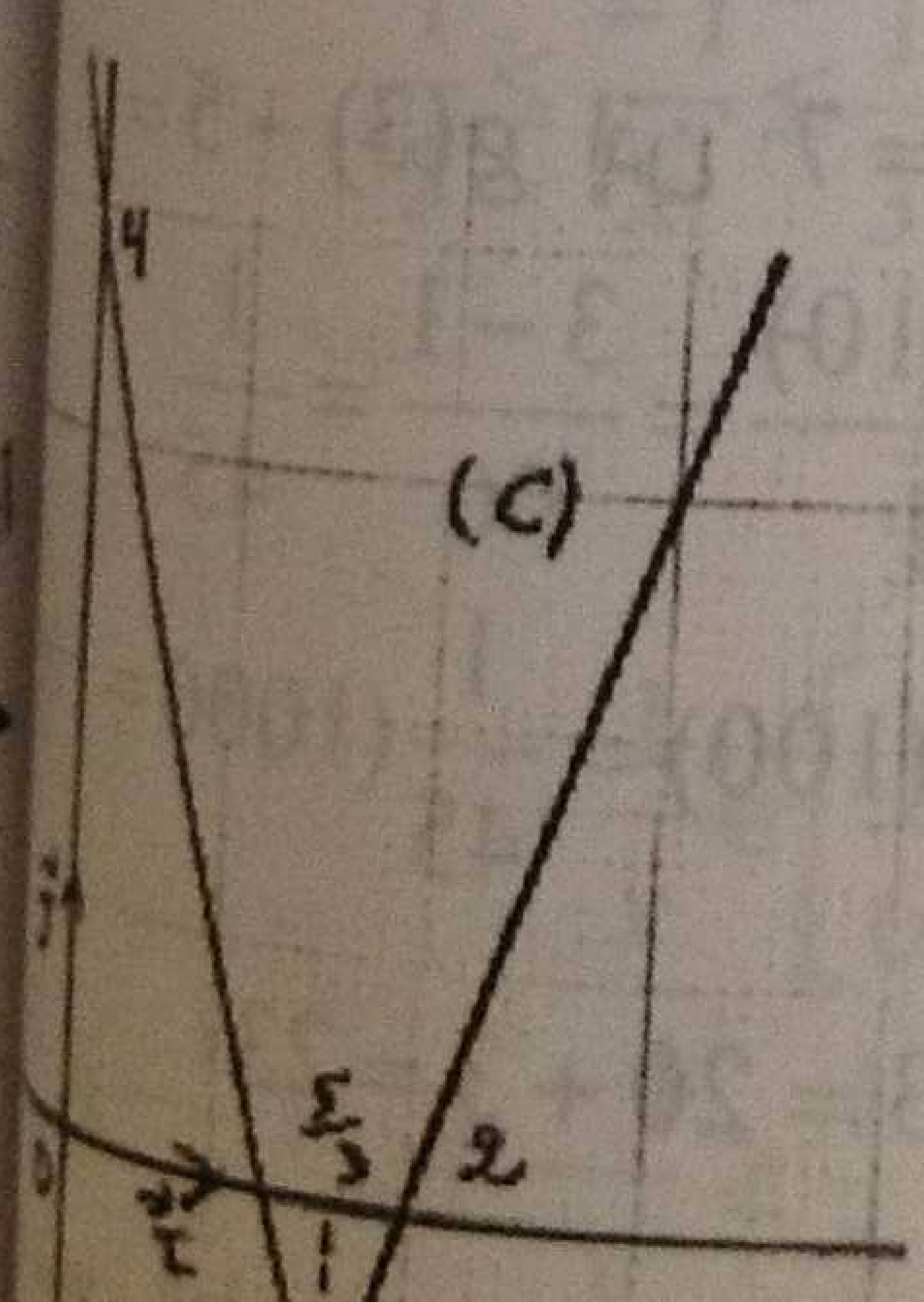
حل التمرين 6:

1) نعلم أن $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$ ، و $|x| = -x$ إذا كان $x \leq 0$

إذن $|3x-5| = 3x-5$ إذا كان $x \geq \frac{5}{3}$

$|3x-5| = -(3x-5) = -3x+5$ إذا كان $x \leq \frac{5}{3}$

وعليه فإن
$$\begin{cases} f(x) = -3x+4 \,;\, x \leq \frac{5}{3} \\ f(x) = 3x-6 \,;\, x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$



2) التمثيل البياني (c) هو اتحاد نصفي مستقيمين معادلتهما $y = -3x+4$ ، $y = 3x-6$ معرفين على المجالين $\left]-\infty;\frac{5}{3}\right]$ ، $\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$.

القيمة الصغرى للدالة f هي $-1 = f\left(\frac{5}{3}\right)$.

$|3x-5|-1\le 2$ معناه: $f(x)\le 2$.

3) الحل البياني للمتراجحة $f(x)\le 2$ يعني إيجاد الفواصل x من R التي تراتيبها أصغر من أو تساوي 2.

- $f(x)\le 2$ معناه: $-3x+4\le 2$ أي $-3x\le -2$ ومنه $x\ge \frac{2}{3}$
- $f(x)\le 2$ معناه: $3x-6\le 2$ أي $3x\le 8$ ومنه $x\le \frac{8}{3}$

مجموعة حلول المتراجحة هي $\frac{2}{3}\le x\le \frac{8}{3}$ أي $\left[\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right]$.

حل التمرين 7:

1) ندرس اتجاه تغير الدالة $f(x)=3+\frac{1}{x-5}$ المعرفة على $R-\{5\}$

- على المجال $]-\infty;5[$: إذا كان $x_1<x_2<5$ فإن $x_1-5<x_2-5<0$

أي $0<-(x_2-5)<-(x_1-5)$ إذن $\frac{-1}{x_2-5}>\frac{-1}{x_1-5}$ أي $\frac{1}{x_2-5}<\frac{1}{x_1-5}$

ومنه $3+\frac{1}{x_2-5}<3+\frac{1}{x_1-5}$ إذن $f(x_2)<f(x_1)$ ومنه f متناقصة على $]-\infty;5[$.

- على المجال $]5;+\infty[$: إذا كان $5<x_1<x_2$ فإن $0<x_1-5<x_2-5$

أي $\frac{1}{x_1-5}>\frac{1}{x_2-5}$ إذن $3+\frac{1}{x_1-5}>3+\frac{1}{x_2-5}$

أي $f(x_1)>f(x_2)$ ومنه f متناقصة على $]5;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f	↘	‖	↘

2) ندرس اتجاه تغير الدالة: $g(x)=-2-\frac{1}{x+1}$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$

* على المجال $]-\infty;-1[$ إذا كان $x_1<x_2<-1$ فإن $x_1+1<x_2+1<0$

أي $0<-(x_2+1)<-(x_1+1)$ إذن $\frac{-1}{x_2+1}>\frac{-1}{x_1+1}$ أي

$$-2-\frac{1}{x_2+1}>-2-\frac{1}{x_1+1}$$

إذن $g(x_2)>g(x_1)$ ومنه f متزايدة على المجال $]-\infty;-1[$.

* على المجال $]-1;+\infty[$: إذا كان $-1<x_1<x_2$ فإن $0<x_1+1<x_2+1$

أي $\frac{1}{x_2+1}>\frac{1}{x_1+1}$ إذن $\frac{-1}{x_2+1}<\frac{-1}{x_1+1}$ أي $-2-\frac{1}{x_2+1}<-2-\frac{1}{x_1+1}$

إذن $g(x_1)<g(x_2)$ ومنه الدالة g متزايدة على المجال $]-1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	↗	‖	↗

<u>حل التمرين 8:</u>

نعلم أن $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$ أي $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$ $(x_1\neq x_2)$

1) نلاحظ أن $a=1$ إذن $f(2005)-f(5)=(2005-5)$

أي $f(2005)=2000+f(5)=2000+6=2006$

2) نلاحظ أن $a=3$ إذن $g(2{,}003)-g(2)=3(2{,}003-2)$

أي $g(2{,}003)=0{,}009+g(2)=0{,}009+5=5{,}009$

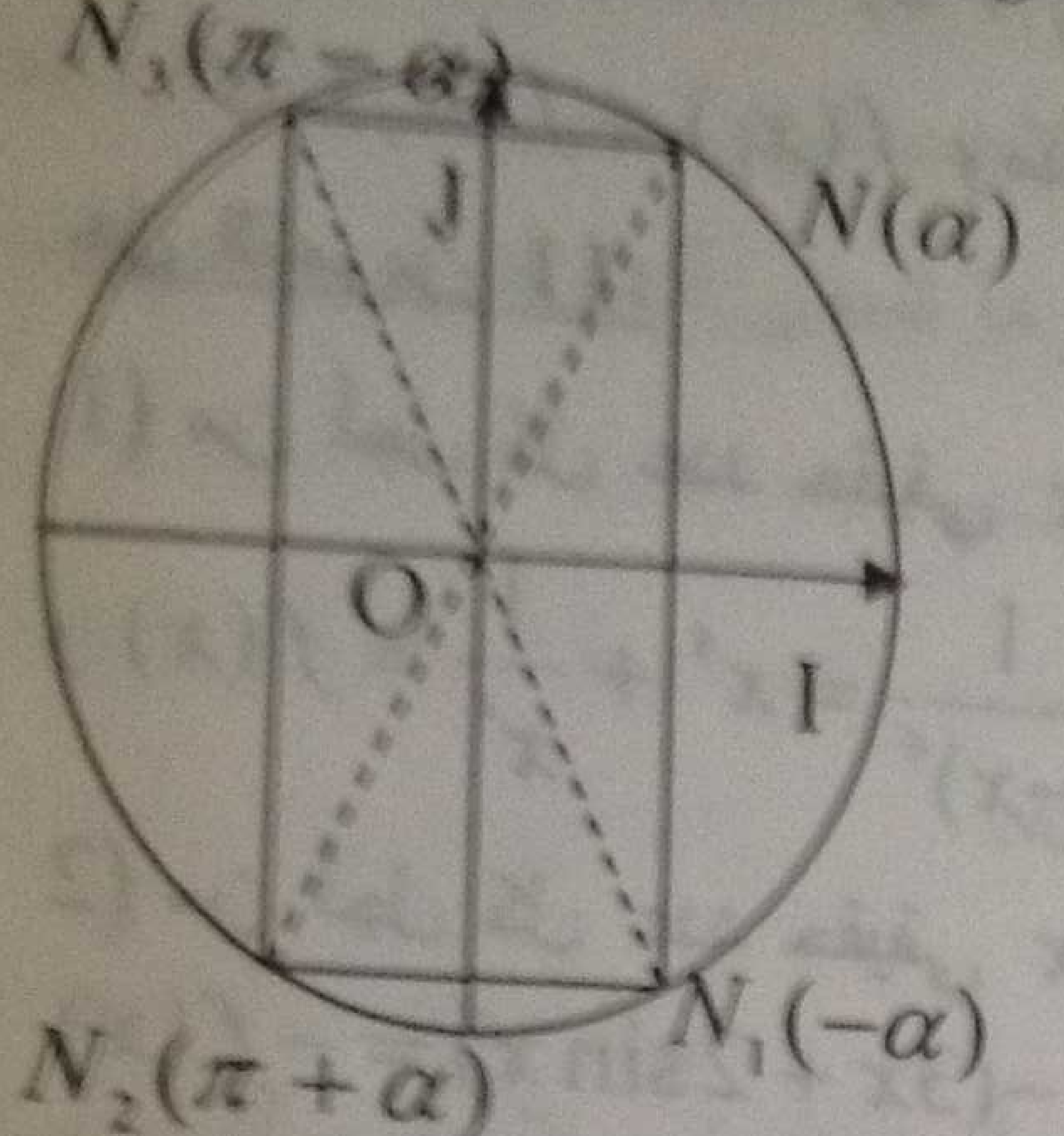
3) نلاحظ أن $a=2$ إذن $h(1+\sqrt{2})-h(1)=2(1+\sqrt{2}-1)$

أي $h(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}+h(1)=2\sqrt{2}+5$.

حل التمرين 9:

1) نعلم أن فاصلة النقطة N هي جيب تمام العدد α، وترتيبها هو جيب العدد α.

وبما أن $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos\alpha=0,5$ أي $\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$



2) الرباعي $NN_1N_2N_3$ هو مستطيل:

3) النقطتان N و N_2، والنقطتان N_1 و N_3 متناظرتان بالنسبة إلى المركز O.

والنقطتان N و N_1 والنقطتان N_3 و N_2 متناظرتان بالنسبة إلى محور الجيوب تمام،

والنقطتان N_1 و N_2، والنقطتان N و N_3 متناظرتان بالنسبة لمحور الجيوب.

4) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ، $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ ،

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ ، $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ،

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ، $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

حل التمرين 10:

1) $(x+2)^2-9=[(x+2)-3][(x+2)+3]=(x-1)(x+5)$

2) الشكل: $f(x)=x^2+(4x-5)$ يمثل مجموع الدالة مربع مع دالة تآلفية

والشكل $f(x)=(x-1)(x+5)$ يمثل جداء دالتين تآلفيتين.

والشكل $f(x)=(x+2)^2-9$ يمثل مربع دالة تآلفية ناقص دالة ثابتة.

3) ندرس اتجاه تغير الدالة : $f(x)=(x+2)^2-9$.

* على المجال $]-\infty;-2]$ إذا كان $x_1<x_2\leq -2$ فإن

$x_1+2<x_2+2\leq 0$

أي $0\leq-(x_2+2)<-(x_1+2)$ ومنه $(x_2+2)^2<(x_1+2)^2$

إذن $(x_2+2)^2-9<(x_1+2)^2-9$

أي $f(x_1) > f(x_2)$ ومنه f متناقصة على المجال $]-\infty;-2]$.

* على المجال $[-2;+\infty[$: إذا كان $-2 < x_1 < x_2$ فإن

$$0 \le x_1 + 2 < x_2 + 2$$

أي $(x_1+2)^2 < (x_2+2)^2$ إذن $(x_1+2)^2 - 9 < (x_2+2)^2 - 9$

أي $f(x_1) < f(x_2)$ ومنه f دالة متزايدة على $[2;+\infty[$.

حل التمرين 11:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من R^* فإن : $-x \in R^*$

و $f(-x) = (-x)^4 + \frac{1}{(-x)^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} = f(x)$ ومنه f دالة زوجية

2) من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-x \in R$ و

$$f(-x) = -3x + 2\sin(-x) = -3x - 2\sin x = -(3x + 2\sin x) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية .

3) من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-x \in R$ و

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5(-x) - 1 = 2x^2 - 5x - 1$$

نلاحظ أن $f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$ إذن f ليست فردية

وليست زوجية .

4) من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-x \in R$

و $f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$ ومنه f دالة فردية.

5) من أجل كل عدد حقيقي x من R^* فإن $-x \in R^*$

و $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$ ومنه f دالة زوجية

7 الإحصاء – مؤشرات الموقع – المدى

مصطلحات إحصائية :

تعريف 1: كل دراسة لظاهرة ما، تتطلب تحديد المجموعة التي تشترك عناصرها في صفة ما والتي ستخضع لدراسة الإحصائي، تسمى عادة هذه المجموعة "المجتمع الإحصائي"، والتي عناصرها تسمى أفراد أو وحدات إحصائية .

تطبيق 1:

المجتمع : عمال مصنع، تلاميذ قسم، سكان مدينة.

الفرد: عامل ، تلميذ، ساكن.

ملاحظة : إذا كان المجتمع الإحصائي كبير جدا، أو تستحيل ملاحظته كليا، أو إذا كانت الدراسة تتطلب تحليل العناصر مثل " تجارب المخبرية الطبية " نقتصر على ملاحظة مجموعة جزئية تدعى العينة.

العيّنة : هي مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي مثل :

مراقبة جزء من مجموعة الصناديق المعروضة للبيع.

الميزة الإحصائية (الطبع الإحصائي) :

كل ظاهرة تكون موضوع الدراسة في المجتمع الإحصائي تسمى ميزة إحصائية .

أمثلة :

- ظاهرة البطالة في الجزائر .
- ظاهرة هجرة الجزائريين إلى أوروبا
- أوزان التلاميذ
- مهنة الأولياء هؤلاء التلاميذ

تنقسم الميزة الإحصائية إلى قسمين : ميزة نوعية وميزة كمية

<u>1/ ميزة نوعية :</u> <u>إذا كانت الميزة الإحصائية لا يمكن التعبير عنها بأعداد نقو</u>

إنها ميزة نوعية مثل : المهنة، الجنس، اللون، وسائل النقل.

<u>2/ ميزة كمية :</u> وتنقسم إلى نوعين :

أ- ميزة كمية ذات طابع منقطع (منفصــل) : وهي التي تأخذ قيماً معزولة و

يمكنها تشكيل مجال مستمر من R مثل : عدد أفراد أسرة .

ب- ميزة كمية ذات طابع مستمر (متصل): وهي التي تأخــذ قيمـــاً يمك

قياسها، أي قيما في مجال مستمر من R مثل : أوزان تلاميذ ثانوية- درجـ

الحرارة في مدينة ما.

<u>السلسلة الإحصائية :</u>

<u>تعريف 2 :</u> نرمز إلى القيم التي يأخذها الطبع الإحصائي بالرمز x_i (يسمى

متغير الإحصائي)، ويشير الرمز n_i إلى تكرار القيمة x_i أي إلى عدد المر

التي تتكرر فيها القيمة x_i.

إذن السلسلة الإحصائية هي مجموعة الثنائيات $(x_i;n_i)$.

<u>التصنيف:</u> إذا كانت لدينا سلسلة إحصائية، صعب علينا نوعا ما، مـن خـ

نظرة واحدة إلى هذا الكشف قراءة هذه السلسلة والإلمام بهـا. ولهـذا نـ

تحسين على تقديم هذه النتائج وذلك بتصنيفها أي بحصرها في مجالات مع

تسمى فئات .

<u>الفئة</u> : هي مجموعة القيم أو المفردات التي تقع بين حدّين مناسـبين بعـ

حسب طبيعة البيانات وأغراض البحث وتمثل كل فئة مجالا من الشكل

a يسمى الحد الأدنى وb يسمى الحد الأعلى.

طول الفئة هو العدد الحقيقي الموجب: $b-a$.

مركز الفئة هو $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى للفئة}}{2} = \frac{a+b}{2}$

ملاحظة : إذا أعطيت مراكز فئات، لها نفس الطول فإنه يمكن إيجاد هذه الفئات عنها بأعداد حساب الحد الأدنى والحد الأعلى لكل فئة باستخدام العلاقة :

الحد الأدنى=مركز الفئة− $\frac{\text{طول الفئة}}{2}$ ،الحد الأعلى=مركز الفئة + $\frac{\text{طول الفئة}}{2}$

التكرار المتجمع الصاعد والنازل:

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد لفئة يساوي تكرار هذه الفئة زائد تكرار كل الفئات التي تسبقها، والتكرار المتجمع النازل لفئة يساوي تكرار هذه الفئة زائد مجموع تكرار كل فئات التي تليها.

مؤشرات الموقع :

تعريف :

المنوال سلسلة إحصائية هي القيمة التي تقابل التكرار الأكبر.

الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل التكرار الأكبر.

نعتبر سلسلة إحصائية، نرتب قيم الميزة الإحصائية ترتيبا تصاعديا أو تنازليا .

الوسيط هو القيمة التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعتين لهما نفس عدد المفردات ونرمز بالرمز Me

الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية $(x_1;n_1),(x_2;n_2),....(x_k;n_K)$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\bar{x}$

والمعرف كما يلي: $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+......+n_Kx_K}{N}$

$$=\frac{1}{N}\times\sum_{i=1}^{i=k}n_i\,x_i$$

حيث $N=n_1+n_2+.....+n_K$.

مفهوم التشتت : مؤشر المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة الإحصائية في السلسلة الإحصائية .

ملاحظة: إذا كانت السلسلة الإحصائية معطاة على شكل فئات فإن

$x_1, x_2, ..., x_K$ تمثل مراكز الفئات.

حساب الوسيط لسلسلة ذات ميزة كمية منقطعة:

* إذا كان عدد القيم فرديا فإن الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم وذلك بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

* إذا كان عدد القيم زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الموجودتين في وسط المجموعة وذلك بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

تطبيق 2:

1) احسب الوسيط للسلسلة الإحصائية : 3، 8، 7، 5، 4، 7، 6.

2) احسب الوسيط للسلسلة الإحصائية : 10، 9، 12، 13، 11، 14.

الحل :

1) نرتب السلسلة تصاعديا : 3، 4، 5، 6، 7، 7، 8

بما أن عدد القيم 7 فرديا فإن الوسيط هو6.

2) نرتب السلسلة تصاعديا : 9 ، 10، 11، 12، 13، 14.

بما أن عدد القيم 6 زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للعددين 11 و 12

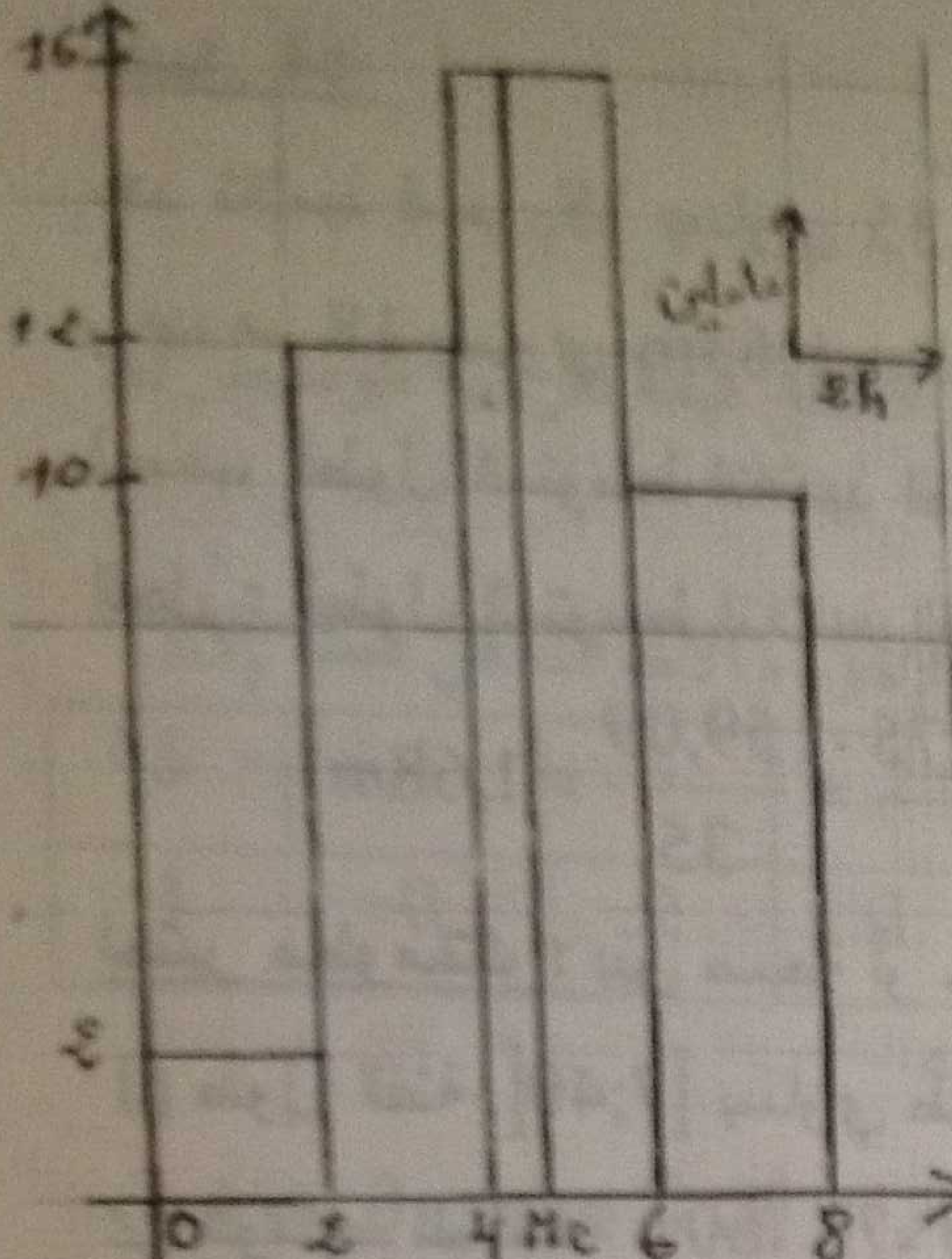
أي : $\frac{11+12}{2}=11,5$

تطبيق 3 : يمثل الجدول التالي توزيع 40 عاملا، حسب المدة التي يناموها خلال 24 ساعة .

1) أنشئ مدرج تكراري لهذا التوزيع :

فئات الأزمنة (h)	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8]
عدد العمال	2	12	16	10
ت.المتجمع الصاعد	2	14	30	40

2) احسب الوسيط لهذه السلسلة .



الحل:

نجعل التوزيع التكراري متجمعا صاعدا

$20=\frac{40}{2}$ أي ترتيب الوسيط = 20.

إذن الفئة الوسطية هي $]4;6[$

بما أن الوسيط Me يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعتين لهما نفس عدد المفردات.

فإن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذي المعادلة $x = Me$ يجزئ المدرج التكراري إلى منطقتين لهما نفس المساحة.

مساحة المستطيل الذي قاعدته $Me - 4$، وارتفاعه 16 يساوي $12 = 2\times6$

لاحظ أن مجموع تكراري الفئة الأولى والثانية يساوي 14 ونصف عدد التكرارات يساوي 20 عاملا أي 6 عمال من الفئة الوسطية $]4;6[$.

$16(M_e-4)=12$ أي $16M_e-64=12$ إذن $16M_e=76$

ومنه $M_e=\frac{76}{16}=4,75h$ أي $M_e=4h\frac{3}{4}h$

خاصية الوسط الحسابي :

ليكن $\bar{x}$ الوسط الحسابي في السلسلة مجموعها التكراري N، حيث القيم x_i تقابلها التكرارات n_i حيث i من المجموعة $\{1,2,3......,K\}$

*1 إذا كان $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ الوسطين الحسابيين لمجموعتين من السلسلة الإحصائية مجموعها التكراريين N_1، N_2 فإن $N=N_1+N_2$، $\bar{x}=\frac{N_1\bar{x}_1+N_2\bar{x}_2}{N}$

*2 الوسط الحسابي للسلسلة التي تأخذ القيم ax_i+b (a و b عددان حقيقيان) تقابلها التكرارات n_i حيث $i\in\{1,2,3....,k\}$ يساوي $a\bar{x}+b$

تطبيق 4:

عدد تلاميذ قسم $1S_1$ يساوي 35 تلميذ و تلميذة، الطول المتوسط للإ

وعددهم 18 يساوي 1,63m، والطول المتوسط للذكور يساوي 75m

احسب الطول المتوسط لتلاميذ القسم .

الحل : الطول المتوسط لتلاميذ القسم هو:

$$\bar{x} = \frac{18 \times 1,63 + 17 \times 1,75}{35} = \frac{59,09}{35} = 1,68m$$

اختبر معلوماتك : بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان).

1) طول الفئة $]7;40]$ يساوي طول الفئة $]19;60]$.

2) الوسيط للسلسلة : 60، 70، 70، 60، 50، 60، 70 يساوي 60.

3) الوسط الحسابي للسلسلة:0,2، 0,4،0,3،0,2، 0,3، 0,5، 0,4 يساوي

4) الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها التكرار الأصغر.

5) الوسيط هو عدد حقيقي ينتمي إلى الفئة الوسطية.

6) المنوال للأسعار (دج):45، 43،55، 45، 56، 55، 45، هو السعر 45

7) مدى السلسلة : 8,4، 3,4، 4,4، 7,4، 6,4 هو 8,4.

8) الصفة المتعلقة بأطوال التلاميذ هي ميزة إحصائية ذات طابع مستمر.

9) وسائل النقل هي ميزة إحصائية كمية ذات طابع منقطع.

10) مركز الفئة $]x+2;x+4[$ يساوي $x+3$.

التمارين

التمرين 1: يمثل الجدول التالي توزيع 32 تلميذا، حسب أطوالهم مقدرة ب

فئات الأطوال	$[1,5;1,6[$	$[1,6;1,7[$	$[1,7;1,8[$	$[1,8;1,9[$
عدد التلاميذ	5	16	9	2

1- ما نوع الميزة الإحصائية المراد دراستها ؟

2- عيّن الفئة المنوالية والفئة الوسطية والمدى.

3- احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة .

4- أنشئ المضلع للتكرار المتجمع الصاعد ثم استنتج قيمة تقريبية للوسيط M_e

التمرين 2:

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية المتعلقة بعدد الإخوة والأخوات في قسم $1S_2$

عدد الإخوة والأخوات	0	1	2	3	4	5
عدد التلاميذ	8	12	1	2	0	1

1) ما نوع الميزة الإحصائية المراد دراستها ؟

2) كم عدد التلاميذ الذين لهم عدد الأخوة والأخوات أقل أو يساوي 3 إخوة.

3) احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة .

4) احسب الوسيط ثم المدى لهذه السلسلة .

5) مثّل بأعمدة هذه السلسلة الإحصائية .

التمرين 3:

في كل سلسلة إحصائية احسب المدى ، الوسيط، المنوال، والوسط الحسابي.

السلسلة A: 8، 9، 10، 10، 12، 9، 12.

السلسلة B: 6، 13، 9، 12، 9، 9، 13، 9، 9.

السلسلة C: 18، 16، 15، 13، 9، 9.

السلسلة E: 12، 12، 13، 16، 17.

التمرين 4: نعتبر السلسلة التالية

الفئات	[0;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[	[25;30
التكرارات	10	15	8	15	7

احسب عدد التكرارات الإجمالي N، المدى e ، الفئة الوسيطية، الفئة المنوالية، الوسط الحسابي.

التمرين 5 :

تمثل السلسلة أطوال 10 لاعبين من فريق اتحاد العاصمة لكرة السلة .
1,80m ،1,95m ،1,97m ،1,88m ،1,98m ،2,10m ،2,05m،
1,87m ،1,94m ،2m. احسب الوسط الحسابي لهذه الأطوال باعتبار ال...
المرجعي : 1) 1,80m . 2) 2m ، 3) 1,90m

التمرين 6:

يمثل الجدول التالي توزيع 120 تلميذا من ثانوية ديرة، حسب المد...
يقضونها منذ خروجهم من المنزل إلى غاية وصولهم إلى ثانوية .

الأز...	[0;10[	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;60[	[60;80[
عدد	5	10	20	40	30	15

1) احسب المدة المتوسطة ثم المدى لهذه السلسلة .

2) عيّن الفئة المنوالية .

3) عيّن التكرار المتجمع الصاعد و المتجمع النازل .

4) أنشئ المدرّج التكراري لهذه السلسلة . أوجد باستعمال المساحات ...
تقريبية للوسيط .

التمرين 7 : تمثل السلسلة التالية المسافات بالكيلو متر بين مقر ال...
والمنزل لتلاميذ قسم $1S_2$ البالغ عددهم 30.

0,2، 0,3، 0,3، 0,4، 0,4، 0,5، 0,5، 0,8، 1، 1، 1,1، 2، 2,5، 8...

3، 3، 3,5، 3,5، 4، 4، 4، 4,5، 4,5، 5,5، 6، 6,8، 7,3، 8، 11

1) احسب المدى والمنوال والوسيط لهذه السلسلة .

2) مثل هذه المعطيات في الفئات : [0;1[، [1;3[، [3;5[، [5;11[

3) عين الفئة المنوالية والفئة الوسطية. أحسب الوسط الحسابي باستخدام ...
الفئات.

والنازل.

4) عين التكرار المتجمع الصاعد والنازل.

التمرين 8: نعتبر 5 مربعات أطوال أضلاعها 6،5،3،2 بالسنتمتر.

1) احسب الطول المتوسط للأضلاع الخمسة.

2) احسب المحيط المتوسط لسلسلة المعطيات الخمسة. هل المحيط المتوسط يساوي محيط المربع الذي طول ضلعه هو الطول المتوسط للأضلاع؟

3) احسب المساحة المتوسطة لسلسلة المساحات الخمسة. هل المساحة المتوسطة تساوي مساحة المربع الذي طول ضلعه هو الطول المتوسط للأضلاع.

الحلول

حل التمرين 1:

1) الميزة المراد دراستها هي ميزة إحصائية كمية ذات طابع مستمر.

2) الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها التكرار الأكبر 16 وهي $[1,6;1,7[$.

والمدى هو الفرق بين أكبر طول و أصغر طول وهو $1,9-1,5=0,4m$

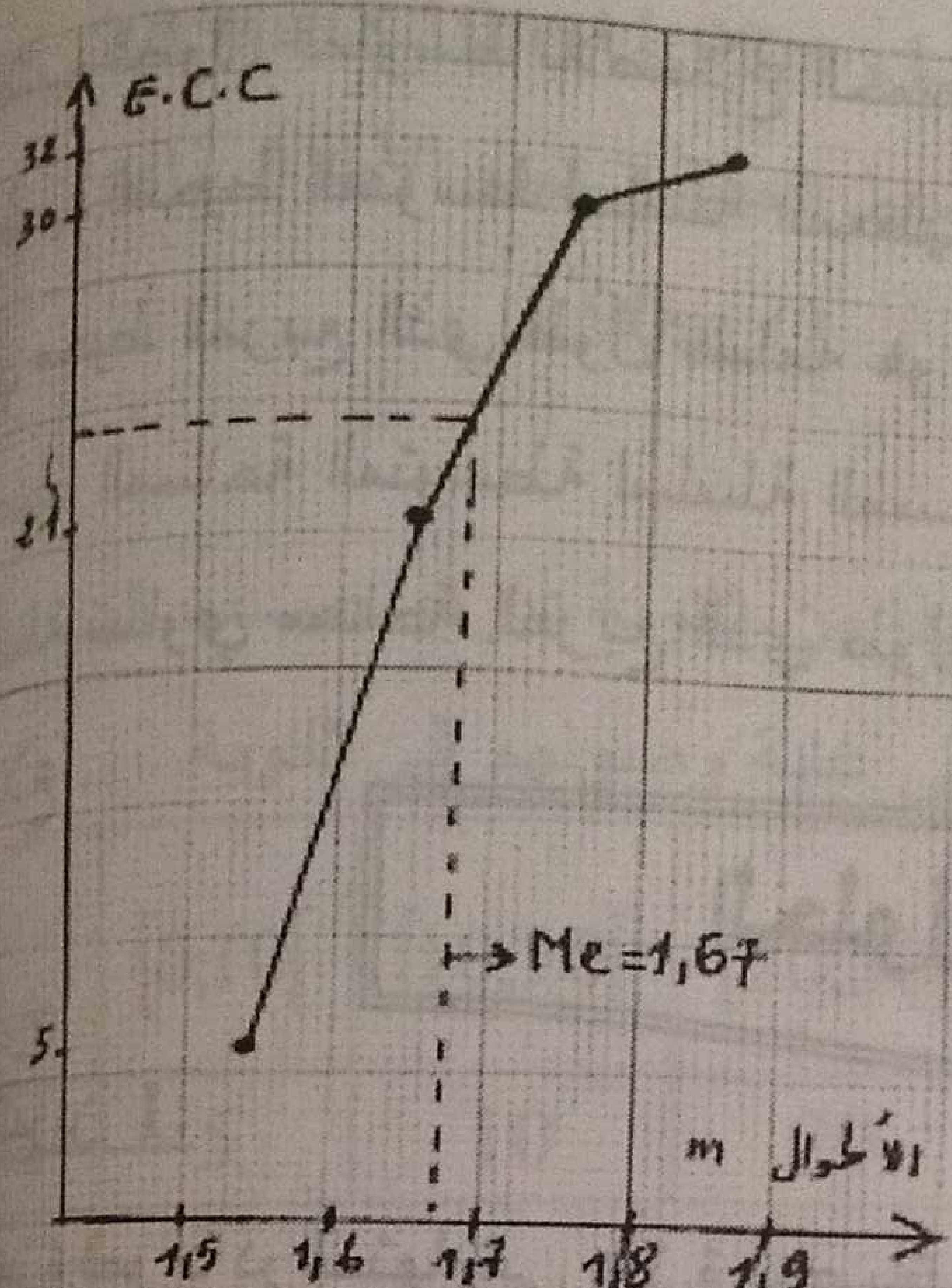
الفئة الوسيطية هي $[1,6;1,7[$ لأن مجموع تكرار الفئة الأولى والثانية هو 21 ونصف التكرارات الكلي هو $16=\frac{32}{2}$.

الفئات (m)	عدد التلاميذ n_i	التكرار المتجمع الصاعد	مراكز الفئات x_i	x_in_i
$[1,5;1,6[$	5	5	1,55	7,75
$[1,6;1,7[$	16	21	1,65	26,4
$[1,7;1,8[$	9	30	1,75	15,75
$[1,8;1,9[$	2	32	1,85	3,7

3) الوسط الحسابي هو: $\bar{x}=\frac{7,75+26,4+15,75+3,7}{32}=1,675m$

4) إنشاء المضلع للتكرار المتجمع الصاعد (E.C.C).

باستعمال هذا المضلع نجد $M_e = 1,67$



حل التمرين 2:

1) الميزة المراد دراستها هي ميزة كمية ذات طابع منقطع .

2) عدد التلاميذ الذين لهم عدد الأخوة لأخوات أقل أو يساوي 3 هو 23.

3) الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو:

$$=\frac{0\times 8+1\times 12+2\times 1+3\times 2+4\times 0+5\times 1}{24}=\frac{25}{24}=1,04$$

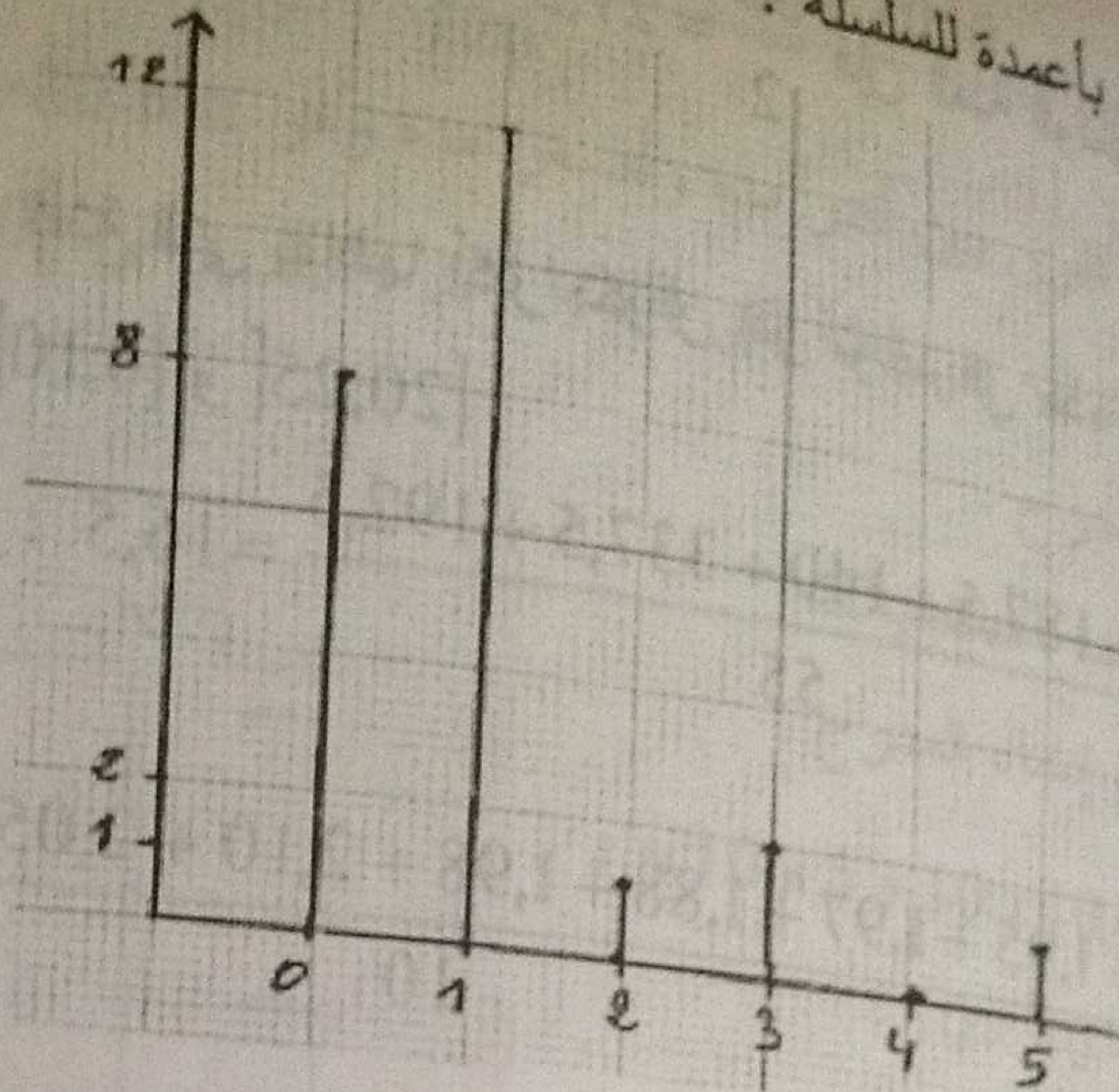
4) لحساب الوسيط نبحث عن التكرار المتجمع الصاعد. $E.C.C$

عدد الأخوة والأخوات	0	1	2	3	4
عدد التلاميذ	8	12	1	2	0
التكرار المتجمع الصاعد	8	20	21	23	23

نصف مجموع التكرارات $\frac{24}{2}=12$ إذن الوسط هو 1.

المدى هو الفرق أكبر قيمة وأصغر أي $5=0-5$.

5) التمثيل باعمدة للسلسلة .



<u>حل التمرين 3:</u>

السلسلة	ترتيبها تصاعديا	المدى	الوسيط	المنوال	الوسط الحسابي
(A)	8،9،9،10،10،12،12	4	10	9 أو 10 أو 12	10
(B)	13،13،12،9،9،9،9،6	7	9	9	9,88
(C)	9،9،13،15،16،18	9	14	9	13,33
(E)	12، 12، 13، 16، 17	5	13	12	14

<u>حل التمرين 4:</u> عدد التكرارات الإجمالي هو N=55

$x_i n_i$	مراكز الفئات x_i	التكرار المتجمع الصاعد E.C.C	التكرارات x_i	الفئات
50	5	10	10	[0;10[
187,5	12,5	25	15	[10;15[
140	17,5	33	8	[15;20[
337,5	22,5	48	15	[20;25[
192,5	27,5	55	7	[25;30[

- المدى هو الفرق أكبر قيمة والأصغر قيمة أي : e =30-0=30

بما أن نصف مجموع التكرارات هو: $\frac{55}{2}=27,5$ فإن الفئة الوسيطية هي $[15;20[$.

* الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار إذن توجد في هذه الحالة فئتان منواليتان هما $[0;10[$ و $[20;25[$

* الوسط الحسابي هو: $\bar{x}=\frac{50+187,5+140+337,5+192,5}{55}=16,5$

حل التمرين 5:

$$\bar{x}=\frac{1,80+1,95+1,97+1,88+1,98+2,10+2,05+1,87+1,94+2}{10}$$

$$=1,954m$$

1) $1,80=1,954-0,154$ أي $1,954=1,80+0,154$

2) $2=1,954+0,046$ أي $1,954=2-0,046$

3) $1,90=1,954-0,054$ أي $1,954=1,90+0,054$

حل التمرين 6:

الفئات (mn)	التكرارات x_i	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل	مراكز الفئات x_i	x_in_i
$[0;10[$	5	5	120	5	25
$[10;20[$	10	15	115	15	150
$[20;30[$	20	35	105	25	500
$[30;40[$	40	75	85	35	1400
$[40,60[$	30	105	45	50	1500
$[60;80]$	15	120	15	70	1050

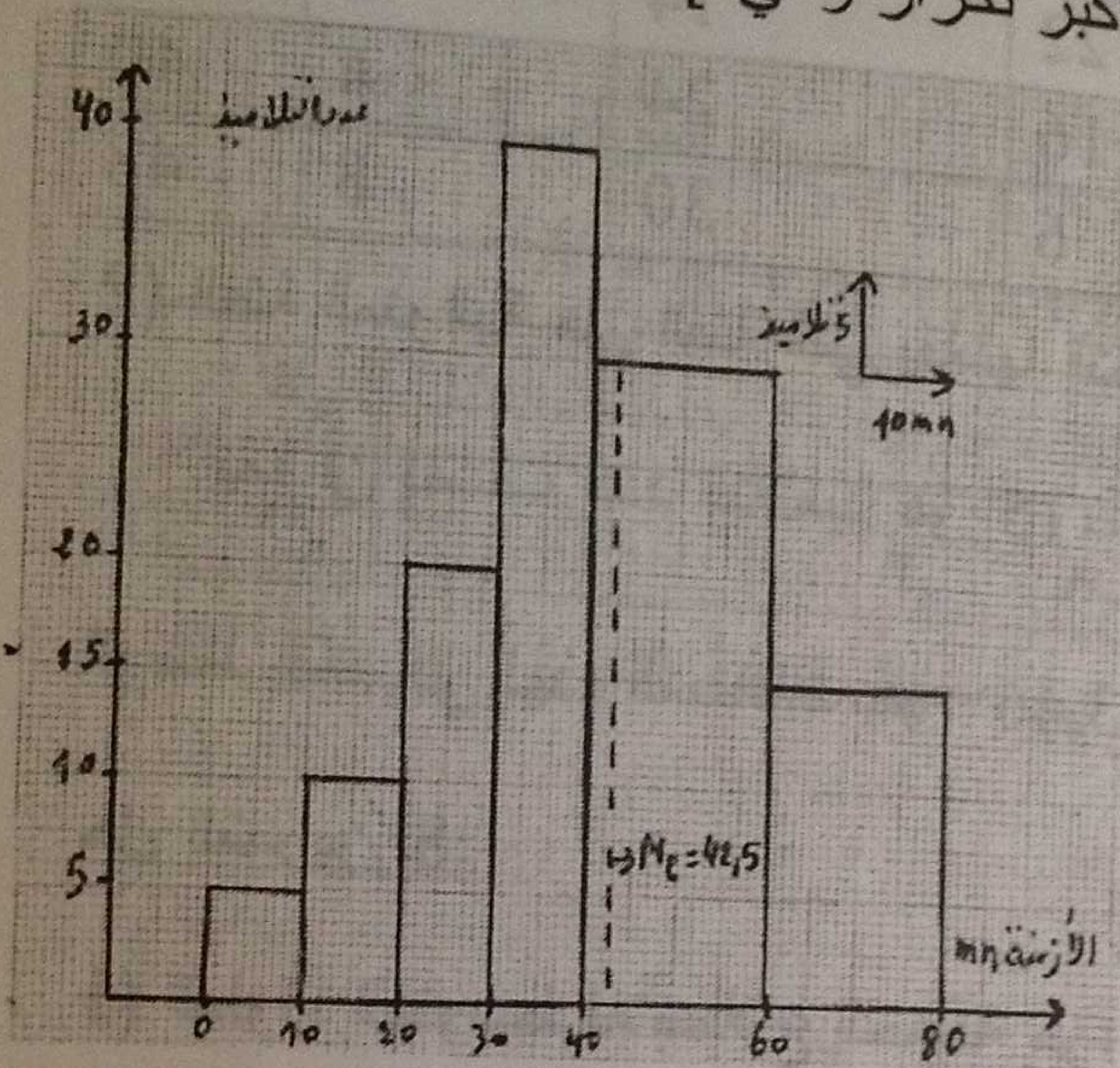
1) المدة المتوسطة هي الوسط الحسابي $\bar{x}$ للسلسلة :

$$\bar{x} = \frac{25+150+500+1400+1500+1050}{120} = 38{,}54mn$$

والمدى هو الفرق بين أكبر مدة وأصغر مدة وهو $e = 80-0 = 80\ mn$

2) الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار وهي $[30;40[$.

4) إنشاء المدرج :



نحسب مساحة المستطيلات الناتجة عن إنشاء المدرج

$s = 10\times5+10\times10+10\times20+10\times40+20\times30+20\times15 = 1650$

نصف المساحة هي 825.

نلاحظ أن مجموع مساحات المستطيلات الأربعة الأولى هي 750 و $750+600 = 1350$

إذن الوسيط Me يقع في الفئة $[40;60[$.

$30(M_e-40)+750=825$ معناه: $30M_e - 1200 = 825 - 750$

ومنه $30M_e = 1275$ إذن $M_e = \frac{1275}{30} = 42{,}5$

حل التمرين 7:

- المدى لهذه السلسلة هو: $e = 11 - 0{,}2 = 10{,}8$
- المنوال لهذه السلسلة هو: 4 (لأن 4 مكررة أربع مرات وهي أكبر تكرار)
- نلاحظ أن هذه السلسلة مرتبة ترتيبا تصاعديا وعدد أفرادها 30 زوجي إذن الوسيط لهذه السلسلة هو الوسط الحسابي للقيمتين الموجودتين في وسط الترتيب. أي 3 $= \frac{3+3}{2} = M_e$

الفئات المسافات (Km)	عدد التلاميذ n_i	التكرار المتجمع النازل E.CD	التكرار المتجمع الصاعد E.C.C	مراكز الفئات x_i	$x_i n_i$
[0;1[	8	30	8	0,5	4
[1;3[	6	22	14	2	12
[3;5[	10	16	24	4	40
[5;11[	6	6	30	8	48

2) الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها التكرار الأكبر وهي [3;5[

بما أن نصف عدد التلاميذ هو $15 = \frac{30}{2}$ فإن الفئة الوسيطية هي [3;5[

الوسط الحسابي لهذه المسافات هو: $\bar{x} = \frac{4+12+40+48}{30} = 3,46$

حل التمرين 8:

1) الطول المتوسط للأضلاع الخمسة هو: $\frac{2+3+4+5+6}{5} = 4cm$

2) المحيط المتوسط هو:

$$p_1 = \frac{2\times4+3\times4+4\times4+5\times4+6\times4}{5} = 16cm$$

محيط المربع الذي طول ضلعه 4 هو $p_2 = 4\times4 = 16cm$

إذن المحيط المتوسط يساوي محيط المربع الذي طول ضلعه هو الطول المتوسط للأضلاع الخمسة .

3) المساحة المتوسطة هي : $S_1 = \frac{2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{5} = 18cm^2$

مساحة المربع الذي طول ضلعه 4 هي $S_2 = 4\times4 = 16cm^2$

إذن المساحة المتوسطة لا تساوي مساحة المربع الذي طول ضلعه المتوسط للأضلاع الخمسة.

معارف:

التكرار النسبي لقيم سلسلة إحصائية :

لتكن السلسلة الإحصائية تأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_p$ المرفقة بالتكرارات $n_1, n_2, ..., n_p$ على الترتيب حيث $N = n_1 + n_2 + ... + n_p$

قيم الميزة الإحصائية	x_1	x_2	x_3	....	x_p
التكرارات	n_1	n_2	n_3	....	n_p

تعريف: التكرار النسبي f_i للقيمة x_i هي حاصل قسمة التكرار n_i على عدد التكرارات الإجمالي N أي $f_i = \frac{n_i}{N}$

ملاحظة: التكرار النسبي f_i هو عدد حقيقي محصور بين 0 و 1 أي $0 \le f_i \le 1$.

الخاصية 1 : مجموع التكرارات النسبية لسلسلة إحصائية يساوي 1.

$$f_1 + f_2 + ... + f_p = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + ... \frac{n_p}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

الخاصية 2 : لتكن سلسلة إحصائية ذات ميزة كمية تأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_p$ التي تقابلها التكرارات النسبية $f_1, f_2, ... f_p$ على الترتيب.

الوسط الحسابي $\bar{x}$ لهذه السلسلة: $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i$

تطبيق : نعتبر السلسلة الإحصائية، والمطلوب حساب الوسط الحسابي لها.

قيم الميزة x_i	3	8	2	4
التكرار النسبي f_i	0,5	0,3	0,1	0,1

$$\bar{x} = 3 \times 0,5 + 8 \times 0,3 + 2 \times 0,1 + 4 \times 0,1 = 4,5$$

التمارين

التمرين 1: نعتبر السلسلة الإحصائية

القيم x_i	x	y	z	k	e
التكرارات n_i	10	12	5	14	9

- احسب التكرار النسبي لهذه السلسلة .

التمرين 2:

عين القيمة x_3 والتكرار النسبي الموافق لها f_3 لسلسلة الإحصائية علما

وسطها الحسابي هو $\bar{x} = 8$.

القيم x_i	2	5	x_3	12
التكرارات النسبية f_i	0,3	0,1	f_3	0,4

التمرين 3: يمثل الجدول التالي التكرار النسبي لقيم سلسلة إحصائية .

- أحسب التكرار الموافق لكل قيمة إذا علمت أن مجمـوع التكرار الإجمالي 50 .

القيم	x	y	z	t
التكرارات النسبية	0,1	0,2	0,4	0,3

- احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة بدلالة x، y، z، t

التمرين 4:

أكمل الجدول التالي الذي يمثل سلسلة إحصـائية علمـا أن العـدد الإجمالي للتكرارات 220 .

ثم احسب الوسط الحسابي باستخدام التكرارات .

القيم x_i	−7	8	9,2	12,8
التكرارات n_i	40	50	80	.....
التكرارات بالنسبة	....	....	....	......

التمرين 5:

يمثل الجدول التالي 100 عدد محصور بين 1 و 10.

عين توزيعا تكراريا تبين فيه عدد مرات ظهور كل رقم من 1 إلى 10 .

ثم احسب التكرار النسبي لكل قيمة x_i.$(1 \le i \le 10)$

9	10	1	1	2	4	9	10	5	3
3	3	7	5	5	10	4	5	10	10
3	2	1	5	2	9	2	1	5	4
3	4	9	6	9	9	6	4	8	7
3	7	5	10	2	5	3	8	9	8
10	3	3	10	5	5	4	4	5	8
4	8	5	4	2	2	9	8	1	1
10	5	6	10	2	7	1	5	8	7
4	1	8	10	8	9	3	4	5	6
8	4	5	5	5	4	1	6	8	3

التمرين 6:

أكمل الجدول التالي علما أن الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو $\overline{x} = 12,9$

12	x	5	20	القيم x_i
0,4	$2f$	f	0,3	التكرا النسبي f_i

استنتج المنوال والمدى لهذه السلسلة .

التمرين 7:

نرمي حجر نرد مرتين متتاليتين ونسجل مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين .

- أكتب مجموعة النتائج الممكنة.
- شكل توزيعا تكراريا تبين فيه عدد مرات ظهور كل نتيجة والتكرارات النسبة الموافقة لها .

التمرين 8:

يمثل الجدول التالي علامات تلاميذ قسم $1S_1$ في اختبار مادة الرياضيات .

العلامات x_i	2	5	9	10	12	15	19
عدد التلاميذ n_i	. 2	3	7	8	6	3	1

1) احسب المنوال والمدى لهذه السلسلة .

2) أنشئ جدولا جديدا بحيث تقسم الفئة $[0;20[$ إلى أربع فئات لها نفس ال...

مبينا فيه تكرار كل فئة والتكرار النسبي لكل فئة .

التمرين 9:

أكمل الجدول التالي الذي يمثل توزيع سلسلة إحصائية . ثم احسب الوسط الحسابي لهذا التوزيع .

القيم x_i	2	5	9,2	12
التكرارات n_i	40	50	80	......
التكرارات النسبية f_i	0,2	....	....	.....

الحلول

حل التمرين 1:

نعلم أن N =50 والتكرار النسبي للقيمة x_i = $f_i = \frac{n_i}{N}$

القيم x_i	x	Y	z	k	e
التكرارات	10	12	5	14	9
التكرار النسبي	0,2	0,24	0,1	0,28	0,18

حل التمرين 2:

نعلم أن مجموع التكرارات النسبية لسلسلة إحصائية يساوي 1.

$0,3 + 0,1 + f_3 + 0,4 = 1$ معناه: $f_3 + 0,8 = 1$ أي $f_3 = 1 - 0,8 = 0,2$

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$$

$$= 2 \times 0,3 + 5 \times 0,1 + x_3 \times 0,2 + 12 \times 0,4 = 0,2x_3 + 5,9$$

$\bar{x} = 9$ معناه: $0,2x_3 + 5,9 = 9$ أي $0,2x_3 = 9 - 5,9 = 3,1$

ومنه $x_3 = \frac{3,1}{0,2} = 15,5$

حل التمرين 3:

نعلم $fi = \frac{n_i}{N}$ أي $n_i = f_i \times N = 50 f_i$

$$n_1 = 50 f_1 = 50 \times 0,1 = 5, n_2 = 50 \times 0,2 = 10, n_3 = 50 \times 0,4 = 20$$

$$n_4 = 50 \times 0,3 = 15$$

الوسط الحسابي هو: $\bar{x} = 0,1x + 0,2y + 0,4z + 0,3t$

حل التمرين 4:

$40 + 50 + 80 + n_4 = 220$ معناه $170 + n_4 = 220$ أي

$$n_4 = 220 - 170 = 50$$

ونعلم أن التكرار النسبي : $f_i = \frac{n_i}{N}$

القيم x_i	-7	8	9,2	12,8
التكرارات n_i	40	50	80	50
التكرارات بالنسبة f_i	0,18	0,22	0,36	0,22
$x_i n_i$	-280	400	736	640

الوسط الحسابي هو: $\bar{x} = \frac{-280 + 400 + 736 + 640}{220} = 6,8$

حل التمرين 5:

نعلم أن تكرار قيمة (أو عدد) هو عدد مرات ظهور هذه القيمة (أو العدد).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	8	11	13	18	5	5	11	9	11
0,09	0,08	0,11	0,13	0,18	0,05	0,05	0,11	0,09	0,11

حل التمرين 6: نعلم أن مجموع التكرارات بالنسبة لسلسلة إحصائية يساوي

$0,3+f+2f+0,4=1$ معناه: $3f=0,3$ إذن $f=\dfrac{0,3}{3}=0,1$

الوسط الحسابي هو:

$$\bar{x}=20\times 0,3+5\times 0,1+x\times 0,2+12\times 0,4=0,2x+11,3$$

$\bar{x}=12,9$ معناه: $0,2x+11,3=12,9$ أي $0,2x=1,6$ إذن $\dfrac{1,6}{0,2}=8$

المنوال هو القيمة التي يقابلها التكرار الأكبر (التكرار النسبي الأكبر) و

Mo=12

والمدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة أي $e=20-5=15$

حل التمرين 7:

نعلم أن حجر نرد هو حجر مكعب الشكل له 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

رميات	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

مجموعة النتائج الممكنة هي 11 نتيجة وهي :

$\{2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12\}$.

القيم x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[illegible]
التكرارات n_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	[illegible]
التكرارات النسبية f_i	0,027	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] هو العلامة التي يقابلها التكرار الأكبر وهو Mo = 10

[illegible] هو الفرق بين أكبر علامة وأصغر علامة وهو e = 19-2 = 17

[illegible] هي : [0;5[، [5;10[، [10;15[، [15;20[

[15;20[	[10;15[	[5;10[	[0;5[	[illegible]
4	14	10	2	[illegible]
0,13	0,46	0,33	0,06	[illegible]

[illegible]

[illegible] مجموع التكرارات الإجمالي $N : \frac{40}{N} = 0,2$ أي $N = \frac{40}{0,2} = 200$

[illegible] $n_4 = 200-(40+50+80)=30$ ولدينا $f_i = \frac{n_i}{N}$

12	9,2	5	2	[illegible]
30	80	50	40	[illegible] n_i
0,15	0,4	0,25	0,2	التكرارات النسبية f_i

المعدل الحسابي: $\bar{x} = 2\times 0,2 + 5\times 0,25 + 9,2\times 0,4 + 12\times 0,15 = 7,13$

9 الأشكال الهندسية المألوفة في المستوى – التحويلات النقطيقة

الخاصية والخاصية العكسية :

إذا كانت خاصية رياضية صحيحة فإن خاصيتها العكسية ليست صحيحة

إذا كانت خاصية من الشكل .

إذا كانت "فرضية الخاصية " فإن " نتيجة الخاصية " .

أو إذا كانت " فرضية الخاصية " تستلزم " نتيجة الخاصية " نسمي الرابطة

الخاصيتين استلزاما .

تطبيق 1: إذا كانت M منتصف القطعة [AB] فإن MA=MB (لكن العكس

غير صحيح) أي إذا كان MA=MB فإن النقطة M ليست منتصف [AB]

التكافؤ :

التعريف 1: إذا كانت الخاصية والخاصية العكسية صحيحتان نستخدم العبارة

إذا و فقط إذا .

ونقول إن الخاصيتان متكافئتان أي إذا كان P تستلزم Q و Q تستلزم p

p تكافئ Q.

تطبيق 2: يكون العدد الطبيعي a أوليا إذا وفقط إذا كان عدد قواسمه اثنين

أنماط البرهان :

الاستدلال بالاستنتاج :

تعريف 2: لكي نبرهن صحة خاصية يكفي أن نبرهن خاصية تكافئها ثم

باستعمال نظريات أو تعاريف أو خواص أخرى أن الخاصية الأولى صحيحة

الاستدلال بالخلف :

تعريف 3: لكي نبرهن صحة خاصية، نفرض أن نفيها صحيحا، ونبرهن أن هذا يؤدي إلى تناقض.

تطبيق 3: برهن أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 5cm، 6cm، 7cm ليس مثلثا قائما.

الحل: نفرض أن هذا المثلث قائما فهو يحقق نظرية فيتاغورس

$7^2=5^2+6^2$ ...(1)

$7^2=49$ و $5^2+6^2=61$ بما أن المساواة (1) خاطئة إذن الجملة المفترضة خاطئة ومنه المثلث ليس قائما .

الاستدلال بمثال مضاد:

تعريف 4: لكي نبرهن أن خاصية خاطئة، يكفي أن نجد مثالا مضادا يجعل هذه الخاصية خاطئة .

تطبيق 4: n عدد طبيعي. برهن عدم صحة القضية : 6n-1 عدد أوليا .

الحل:

من أجل n = 6 فإن $6n-1=6\times6-1=36-1=35$

35 ليس أوليا إذن الخاصية المقترحة ليست صحيحة .

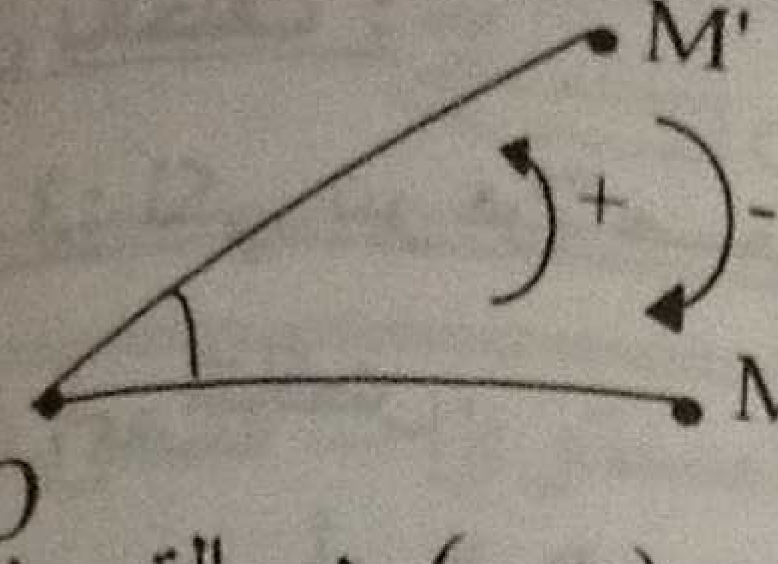
التحويلات النقطية في المستوي :

القضية 1: التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران تسمى تحويلات نقطية (تساوي قياس) تحفظ الأطوال والمساحات والمنتصفات والزوايا الهندسية، التوازي والتعامد.

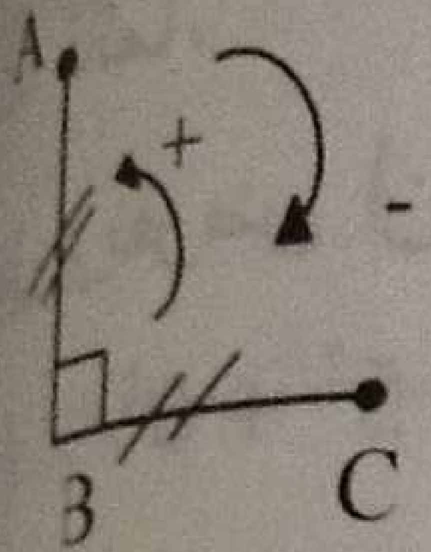
الدوران:

تعريف: a عدد محصور بين 0 و180 . نسمي دوران مركزه O وزاويته a، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث :

$OM = OM'$ و $M\hat{O}M' = \alpha$



ملاحظة : الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $(-\alpha)$ هو التحويل الذي يحول 'M إلى M.



تطبيق 5:

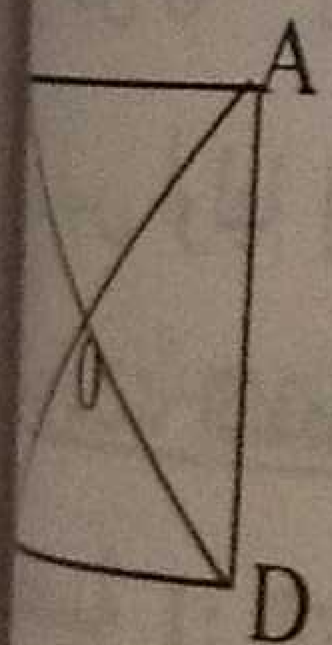
* النقطة C صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه B وزاويته (-90°)
* النقطة A صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته (+90°)

اختبر معلوماتك : بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان).

1) (C) دائرة مركزها O، A و B نقطتان من (C) إذا كان المماسان للدائرة (C) في A و B متعامدان فإن المثلث AOB متساوي الساقين .

2) $ABCD$ متوازي أضلاع Eنظيرة D بالنسبة إلى B، إذن النقطة B مركز ثقل المثلث AEC.

3) نعتبر الشكل التالي من السؤال 3 إلى 8 .



B صورة D بالدوران الذي مركزه C وزاويته 90°.

4) A صورة C بالدوران مركزه B وزاويته 90°.

5) C صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90°-.

6) المثلثان ABC و ADC متقايسان .

7) إذا كان المثلث AOB قائم فإن : $OA^2 + OB^2 = AB^2$

8) إذا كان $OB^2 + OC^2 = BC^2$ فإن المثلث BOC قائم فيO.

9) إذا كان $AB = CD$ و $AD = BC$ فـإن الربـاعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

10) إذا كان $\overline{CD} = \overline{AB}$ فإن $CD = AB$.

11) ABCD معين إذا وفقط إذا كان المستقيمان (AC) و(BD) متعامدان .

التمارين

التمرين 1:

ABCD مربع. (C) دائرة نصف قطرها r = 3cm تشمل رؤوس المربع.

1) احسب بتقريب 10^{-2} طول ضلع المربع .

2) احسب بتقريب 10^{-2} مساحة الجزء الواقع بين المربع و الدائرة .

التمرين 2: ABC مثلث متقايس الأضلاع .

1) أنشئ النقطة D بحيث يكون $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

2) أنشئ النقطة G صورة B بالدوران الذي مركزه A ويحول C إلى B.

3) أنشئ النقطة E نظيرة B بالتناظر المركزي الذي مركزه A.

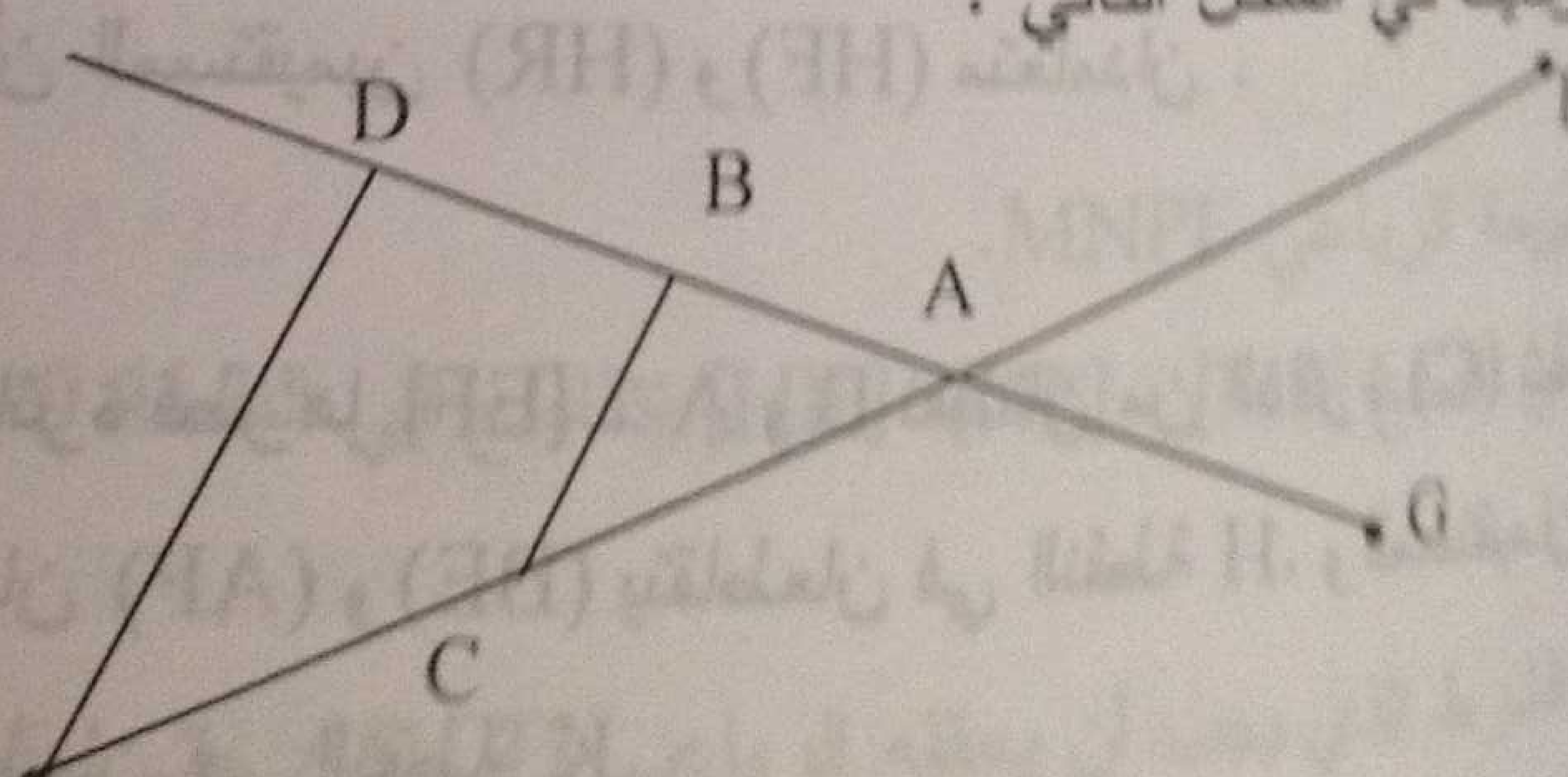
4) أنشئ النقطة F صورة E بالانسحاب الذي يحوّل C إلى B.

5) ماهي طبيعة السداسي BCDEFG؟

التمرين 3: ABC حيث : AB=7cm ،BC=8cm ،AC=5cm

برهن أن المثلث ABC ليس قائما .

التمرين 4: لديك في الشكل التالي :



AB=3cm ،AC=4cm ، AF=5cm ، AG=3,7cm ،BD=5cm ،DE=4cm

المستقيمان (BC) و (DE) متوازيان .

1) أعد الرسم بأبعاده الحقيقية .

2) احسب قيمة دقيقة لكل من الطولين AE و BC

3) هل المستقيمان (FG) و(BC) متوازيان ؟

التمرين 5:

ABCD مستطيل، P نقطة من الضلع [AC] المستقيم العمودي على المس (AC) في النقطة p، يقطع المستقيم (DC) في النقطة T، ويقطـع المس (AB) في النقطة M، ويقطع المستقيم (AD) في النقطة S. أنشئ الشكل.

1) برهن أن المستقيمين (AT) و(SC) متعامدان.

2) برهن أن النقط P، M، B، C (دائرية) تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تع مركزها ونصف قطرها .

التمرين 6:

ليكن MNP مثلث قائم في M و H المسقط العمودي للنقطة M على المس (NP). R و Fمنتصفا الضلعين [MN] و[MP] على الترتيب.

1) برهن أن المثلثين RMH وFMH متساويا الساقين في النقطتين R وF على الترتيب .

2) برهن أن المستقيم (RF) محور القطعة [MH] .

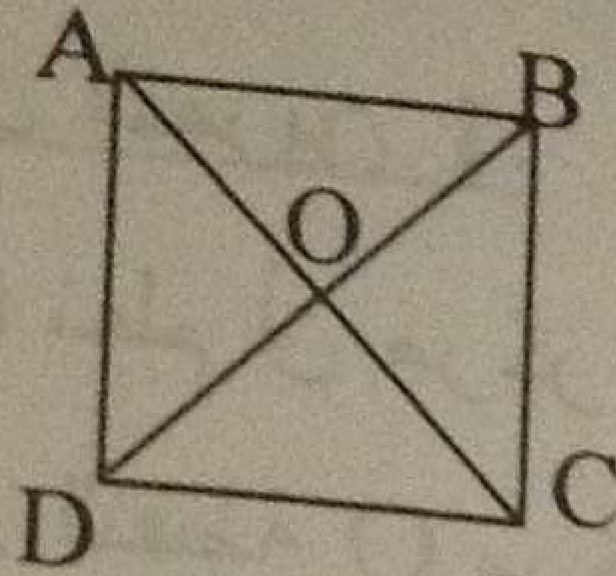
3) استنتج أن المستقيمين (HR) و(HF) متعامدان .

التمرين 7:

لتكن (C) دائرة قطرها [EF] . A و B نقطتان من الدائرة (C) تختلفان عن E و F المستقيمان (AF) و(BE) يتقاطعان في النقطة H. والمستقيمان (AE) و(BF) يتقاطعان في النقطة K.

1) أنشئ الشكل .

2) برهن أن المستقيمين (KH) و(EF) متعامدان .



التمرين 8:

ABCD مربع مركزه النقطة O

1) عيّن صورة النقطة B بالدوران ذو مركز O والزاوية 90°

2) عيّن صورة النقطة C بالانسحاب الذي يحول D إلى A

3) عيّن صورة النقطة D بالتناظر المحوري ذو المحور (AC).

4) عيّن صورة النقطة A بالتناظر المركزي ذو المركز O.

5) عيّن صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته -90°

6) عيّن عناصر الدوران الذي يحول القطعة [AB] إلى القطعة [BC].

التمرين 9:

ليكن ABC مثلث قائم في B بحيث AB= 3cm. و M منتصف الضلع [AC] حيث BM= 3,5cm

1) برهن أن BM= AM= MC

2) احسب الطول BC. ثم استنتج مساحة المثلث ABC.

التمرين 10:

ABCD رباعي زواياه الأربعة غير متساوية. نعتبر النقط M،N،P،F،H،K منتصفات الأضلاع [AB] ، [BC] ، [CD] ، [DA] ، [AC] ، [BD] علـى الترتيب .

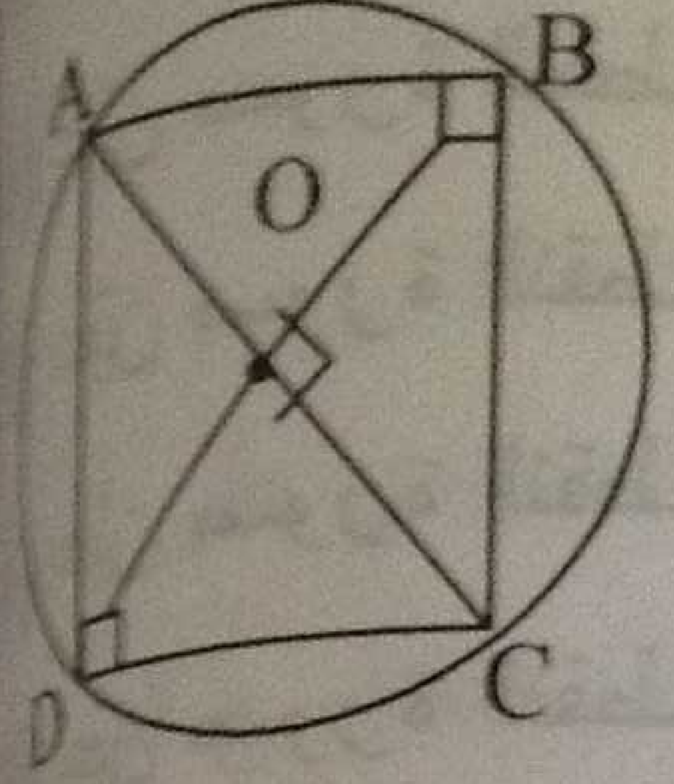
1) عيّن طبيعة الرباعي MNPF.

2) برهن أن القطع [MP] ، [NF] ،[HK] تتقاطع في النقطة 0 هي منتصف كل قطعة .

3) ماهو الشرط الذي يجب أن يحققه الرباعي ABCD حتى يكون الرباعي MNPF: أ) مستطيل ، ب) معيّن ، جـ) مربع .

الحلول

حل التمرين 1:



1) نعلم أن مركز المربع ABCD هو نقطة تقاطع قطريه .

أي النقطة O مركز الدائرة المحيطة بالمربع .

أي $OB = OA = 3cm$

ولدينا ABC مثلث قائم في B متقايس الضلعين حيث :

$AC = 6cm$ ، $AB = BC$

حسب نظرية فيتاغورس $AB^2 + BC^2 = AC^2$ أي $2AB^2 = 36$

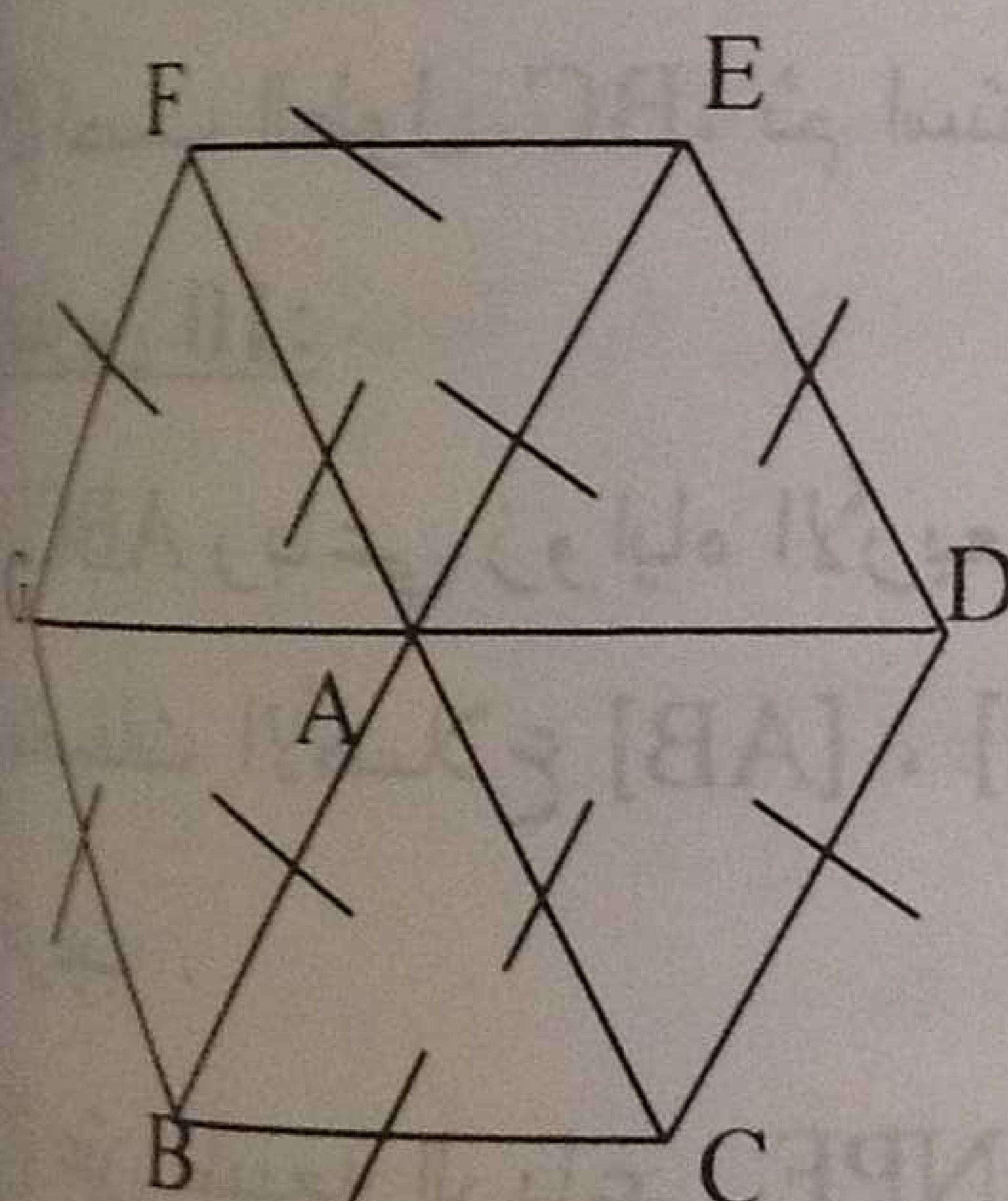
ومنه $AB^2 = 18$ إذن $AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}cm$

2) مساحة المربع هي : $S_1 = AB^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18cm^2$

مساحة الدائرة هي : $S_2 = \pi\ r^2 = 3{,}14 \times 3^2 = 28{,}26cm^2$

مساحة الجزء الواقع بين المربع والدائرة هي: $28{,}26 - 18 = 10{,}26cm^2$

حل التمرين 2:



بما أن $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ فإن $CD = BA$ و $ED = AC$

وبما أن G صورة B بالدوران الذي مركزه A

ويحول C إلى B فإن $AG = AB$

وبما أن E نظيرة B بالتناظر المركزي ذو

المركز A فإن $AB = AE$

وبما أن F صورة E بالانسحاب الذي يحول C إلى B

فإن $AC = AF$ و $AB = AE$

ولدينا أيضا : $C\hat{A}D = C\hat{A}B = B\hat{A}G = G\hat{A}F = F\hat{A}E = E\hat{A}D = 60°$

$$AC = AB = AG = AF = AE = AD$$

إذن BCDEFG هو سداسي منتظم مركزه النقطة A وهي مركز الدائرة ذات نصف القطر AD المحيطة بهذا السداسي .

حل التمرين 3:

لدينا AB=7cm ، BC=8cm ، AC= 5cm .

نبرهن باستعمال الاستدلال بالخلف أي نفرض أن ABC مثلث قائم ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض . حسب نظرية فيتاغورس : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

$BC^2 = 8^2 = 64$ و $AC^2 + AB^2 = 5^2 + 7^2 = 74$

إذن 64 = 74 مستحيل وهذا معناه أن الفرضية خاطئة ومنه ABC مثلث ليس قائما .

حل التمرين 4:

1) لــــــدينا AB=3cm ، AC=4cm ، AF=5cm ، AG=3,7cm ، BD=5cm ، DE=9cm (يمكنك إنشاء الرسم بأبعاده الحقيقية).

2) (BC)//(DE) ، AD=AB+BD= 3+5= 8cm. حسب نظرية طـــاليس فإن:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{3}{8}$$

• $\frac{AC}{AE}=\frac{3}{8}$ معناه: $AE=\frac{8}{3}\times AC=\frac{8}{3}\times 4=\frac{32}{3}cm$

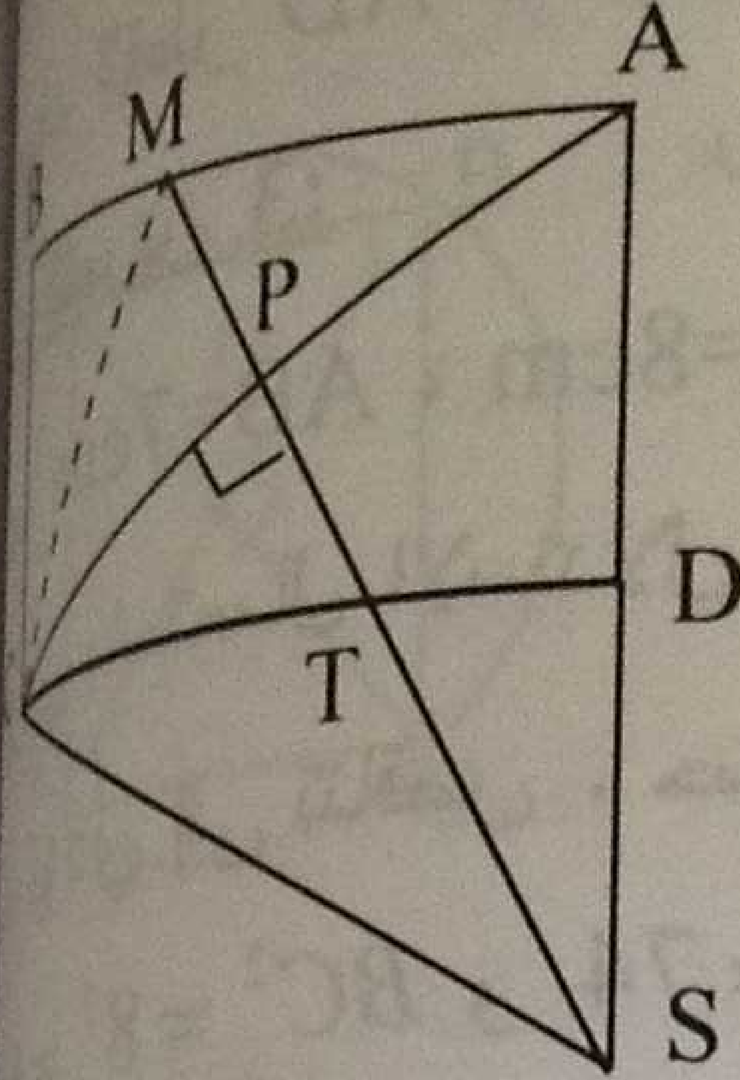
• $\frac{BC}{DE}=\frac{3}{8}$ معناه: $BC=\frac{3}{8}\times DE=\frac{3}{8}\times 9=\frac{27}{8}cm$

3) لدينا $\frac{AF}{AE}=\frac{5}{\frac{32}{3}}=\frac{15}{32}$ و $\frac{AG}{AD}=\frac{3,7}{8}=\frac{14,8}{32}$

بما أن $\frac{AG}{AD}\neq\frac{AF}{AE}$ حسب النظرية العكسية لطـــاليس فـــإن المســـتقيمين (FG) و (BC) غير متوازيين .

حل التمرين 5:

1) لدينا $(AC)\perp(SP)$ و $(CD)\perp(AS)$ من المعطيات .



ولدينا في المثلث ACS، (CD) هو العمود المتعلق بالضلع [AS] ويشمل C و(SP) هو العمود المتعلق بالضلع [AC] ويشمل S.

و T هي نقطة تقاطع العمودين (SP) و(CD).

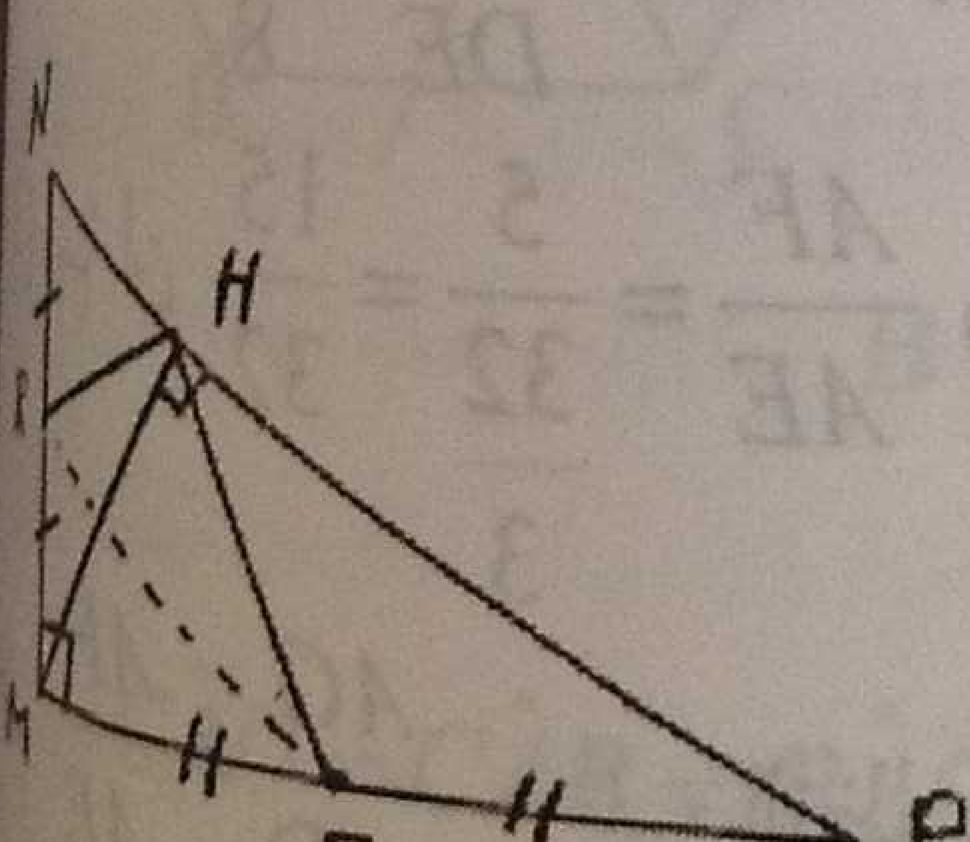
ونعلم أن أعمدة المثلث الثلاثة تتلاقى في نقطة واحدة إذن المستقيم (AT) هــو العمــود المتعلــق بالضــلع [SC] ويشــمل A أي $(AT)\perp(SC)$.

2) لدينا المثلث MPC قائم في P حسب إحدى الخواص فإن O منتصف الوتر [MC] هي مركز الدائرة المحيطية بالمثلث MPC أي النقط C،P،M تنتمي إلى الدائرة ذات المركزO ونصف القطر OM OP=OC=OM

ولدينا المثلث BMC قائم في P. حسب إحدى الخواص فإن O منتصف الوتر [MC] هي مركز الدائرة المحيطية بالمثلث BMC أي النقط C،M،B تنتمي إلى الدائرة ذات المركزO ونصف القطر OM OC= OB= OM

بما أن OB=OP=OC=OM فإن النقط C،B،M،P تنتمي إلى نفس الـدائرة ذات المركز O ونصف القطر OM.

حل التمرين 6:



1) بما أن المثلث MNH قائم في H، وR منتصف [MN] .

حسب إحدى الخواص فإن النقطـــة R هـــي مركز الدائرة المحيطة بالمثلــث MNH أي RM=RN=RH ومنه RM=RH أي المثلث RMH متساوي الساقين في R

• وبما أن المثلث MPH قائم في H، و F منتصف [MP] حسب إحدى الخواص فإن النقطة F هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث MPH أي FM=FH=FP.

ومنه FM=FH أي المثلث FMH متقايس الضلعين في F.

2) لدينا في المثلث MNP، و F و R منتصفا [MP] و [MN] على الترتيب إذن حسب إحدى الخواص فإن (FR)//(PN). وبما أن $(MH)\perp(PN)$ فإن $(MH)\perp(FR)$. إذن (RF) هو عمود في المثلث RMH ونعلم أن العمود في المثلث المتقايس الضلعين هو محور و منصف ومتوسط وعليه فإن (RF) محور القطعة [MH] .

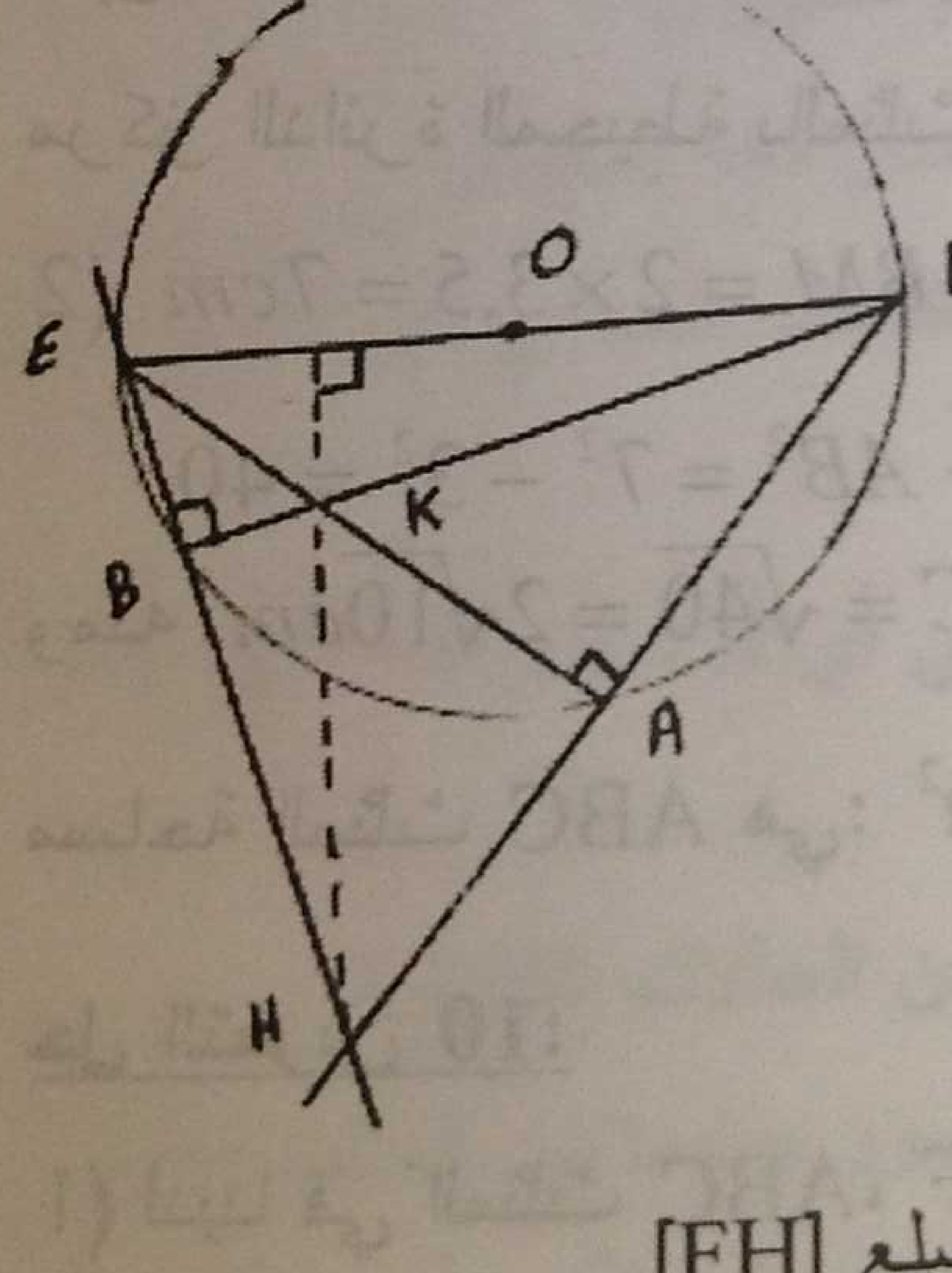
3) نعلم أن $M\hat{H}F + F\hat{H}P = 90°$ و $F\hat{M}H = M\hat{H}F$

و $N\hat{M}H + F\hat{M}H = 90°$

وبما أن $R\hat{H}M = N\hat{M}H$ فإن $R\hat{H}M + M\hat{H}F = 90°$

ومنه المثلث RHF قائم في H أي المستقيمان (HR) و (HF) متعامدان .

<u>حل التمرين 7:</u>



إذا كانت O منتصف الضلع [EF] هي مركز الدائرة المحيطية بالمثلث FBE فإن هذا المثلث قائم في B أي $(FB)\perp(EH)$.

ولدينا أيضا O منتصف [EF] هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث FAE إذن هذا المثلث قائم في A.

أي $(EA)\perp(FH)$.

ولدينا في المثلث FHE (EA) عمود متعلق بالضلع [FH] ويشمل E (FB) عمود متعلق بالضلع [EH] ويشمل F.

نعلم أن أعمدة المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

إذن K هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث FHE ومنه ينتج أن $(EF)\perp(KH)$

حل التمرين 8:

1) النقطة A هي صورة النقطة B بالدوران ذو المركز O والزاوية $90°$.

2) النقطة B هي صورة النقطة C بالانسحاب الذي يحوّل D إلى A.

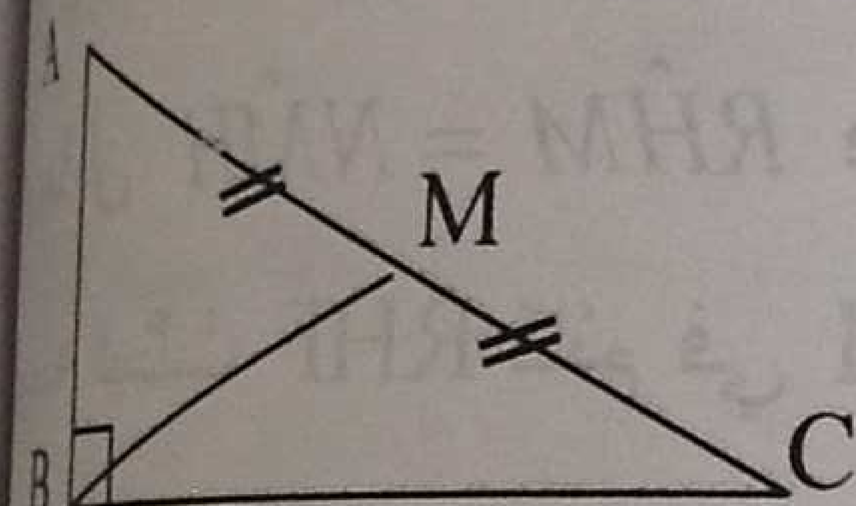
3) النقطة B هي صورة النقطة D بالتناظر المحوري ذو المحور (AC).

4) النقطة C هي صورة النقطة A بالتناظر المركزي ذو مركز O.

5) النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.

6) الدوران ذو مركز O والزاوية $-90°$ هو الذي يحول القطعة [AB] إلى القطعة [BC]

حل التمرين 9:



1) لدينا $AB=3cm$ ، $BM=3,5cm$

نعلم أنه إذا كان ABC مثلث قائم في B

فإن النقطة M منتصف الوتر [AC] هي

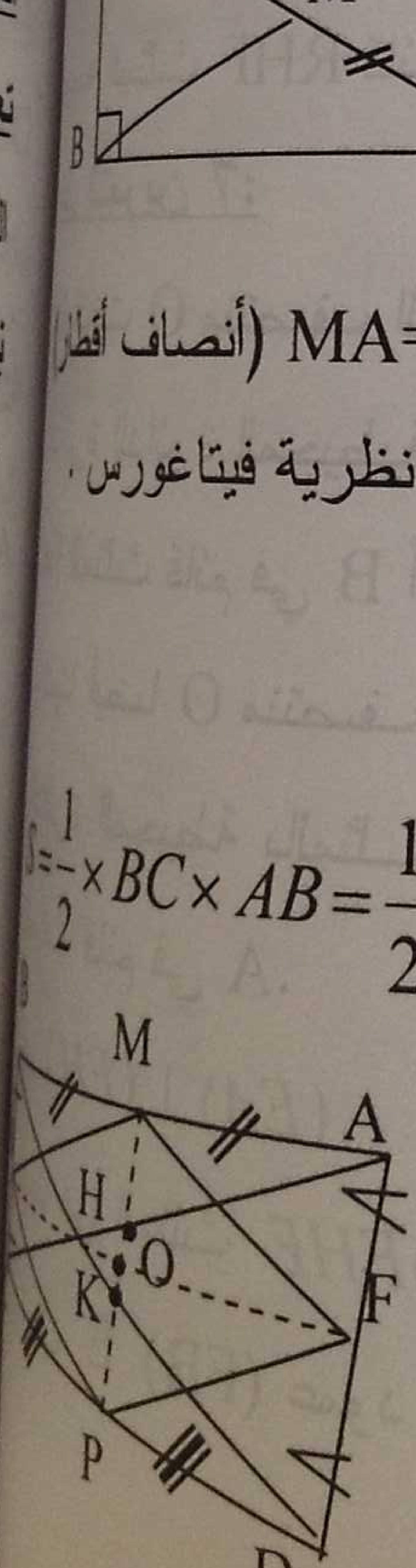
مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC أي MA=MB=MC (أنصاف أقطار

2) $AC=2\times BM=2\times 3,5=7cm$ ولدينا حسب نظرية فيتاغورس.

$$BC^2=AC^2-AB^2=7^2-3^2=40$$

ومنه $BC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}cm$

مساحة المثلث ABC هي: $S=\frac{1}{2}\times BC\times AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 3=9,48cm^2$



حل التمرين 10:

1) لدينا في المثلث ABC، F و M منتصفا

[AD] و [AB] إذن (BD)//(MF) و $MF=\frac{1}{2}BD$

ولدينا في المثلث BCD ، P و N منتصفا [CD] و [BC] إذن (NP)//(BD) و $NP = \frac{1}{2}BD$ وعليه يكون (NP)//(MF)

و NP= MF حسب إحدى الخواص فإن الرباعي MNPF متوازي أضلاع .

2) بما أن الرباعي MNPF متوازي أضلاع فإن النقطة O نقطة تقاطع قطريه [NF] و[MP] هي منتصف القطرين أي O منتصف القطع [MP]،[NF]،[HK]

3) إذا كان الرباعي ABCD معين فإن الرباعي MNPF مستطيل.

وإذا كان الرباعي ABCD مستطيل فإن الرباعي MNPF معين

وإذا كان الرباعي ABCD مربع فإن الرباعي MNPF مربع .

10 المثلثات المتقايسة – المثلثات المتشابهة

معارف :

المثلثات المتقايسة :

تعريف 1: يكون مثلثان متقايسان إذا كان صورة أحدهما هو الآخر بالتناظر المحوري أو التناظر المركزي، أو الانسحاب، أو الدوران .

نتيجة : إذا كان ABC و A'B'C' مثلثان متقايسان فإنه ينتج أن

* أضلاع المثلث الأول تساوي أضلاع المثلث الثاني أي AB=A'B' و BC=B'C' و AC = A'C'.

* زوايا المثلث الأول تساوي زوايا المثلث الثاني أي $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$

حالات تقايس مثلثين :

يتقايس مثلثان ABC و A'B'C' في كل حالة من الحالات التالية :

الحالة الأولى: إذا تساوت زاويتان وضلع محصور بينهما من المثلث الأول مع زاويتين وضلع محصور بينهما من المثلث الثاني أي $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ و AB=A'B'.

الحالة الثانية : إذا تساوى ضلعان وزاوية محصورة بينهما من المثلث الأول مع ضلعين وزاوية محصورة بينهما من المثلث الثاني أي $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$ و $\hat{A}=\hat{A}'$.

الحالة الثالثة : إذا تساوت ثلاثة أضلاع من المثلث الأول مع ثلاثة أضلاع من المثلث الثاني أي $AB=A'B'$ و $AC=A'C$ و $BC=B'C'$.

المثلثات المتشابهة :

حالات تشابه مثلثين :

يتشابه المثلثين ABC و A'B'C' في كل حالة من الحالات التالية :

الحالة الأولى : زاويتان من المثلث الأول مع زاويتين من المثلث الثاني أي ($\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$) يستلزم المثلثان متشابهان .

الحالة الثانية : إذا تناسب ضلعان من المثلث الأول مع ضلعين من المثلث الثاني والزاوية المحصورة بالضلعين المتناسبين في المثلث الأول تساوي الزاوية المحصورة بالضلعين المتناسبين من المثلث الثاني .

أي $\left(\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\right)$ و $\hat{A}=\hat{A}'$ يستلزم المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان

الحالة الثالثة : إذا تناسبت الأضلاع الثلاثة للمثلث الأول مع الأضلاع الثلاثة للمثلث الثاني أي $\left(\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\right)$ يستلزم المثلثانABC و A'B'C' متشابهان .

نسبة التشابه :

تعريف : نسمي نسبة التشابه بين المثلثين ABC و A'B'C' القيمة المشتركة للنسب بين الأضلاع المتماثلة في المثلثين، وتكون نسبة تشابه المثلث A'B'C' للمثلث ABC هي $\frac{A'B'}{AB}=K$.

ملاحظة :

- من المألوف أن نعتبر مثلثين متقايسين كمثلثين متشابهين نسبة تشابههما تساوي 1
- يتشابه مثلثين إذا توازت الأضلاع الثلاثة للمثلث الأول مع الأضلاع الثلاثة للمثلث الثاني
- المثلثان المتساويا الأضلاع هما مثلثان متشابهان .
- المثلثان قائما الزاوية ومتساويا الساقين هما مثلثان متشابهان .
- يتشابه المثلثان القائمان إذا تناسب الضلعان القائمان من المثلث الأول مع الضلعين القائمين في المثلث الثاني .
- يتشابه المثلثان القائمان إذا تناسب الوتر وضلع قائم من المثلث الأول مع الوتر وضلع قائم في المثلث الثاني أي: $\left(\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}\right.$ و $\left.\hat{A}=\hat{A}'=90°\right)$

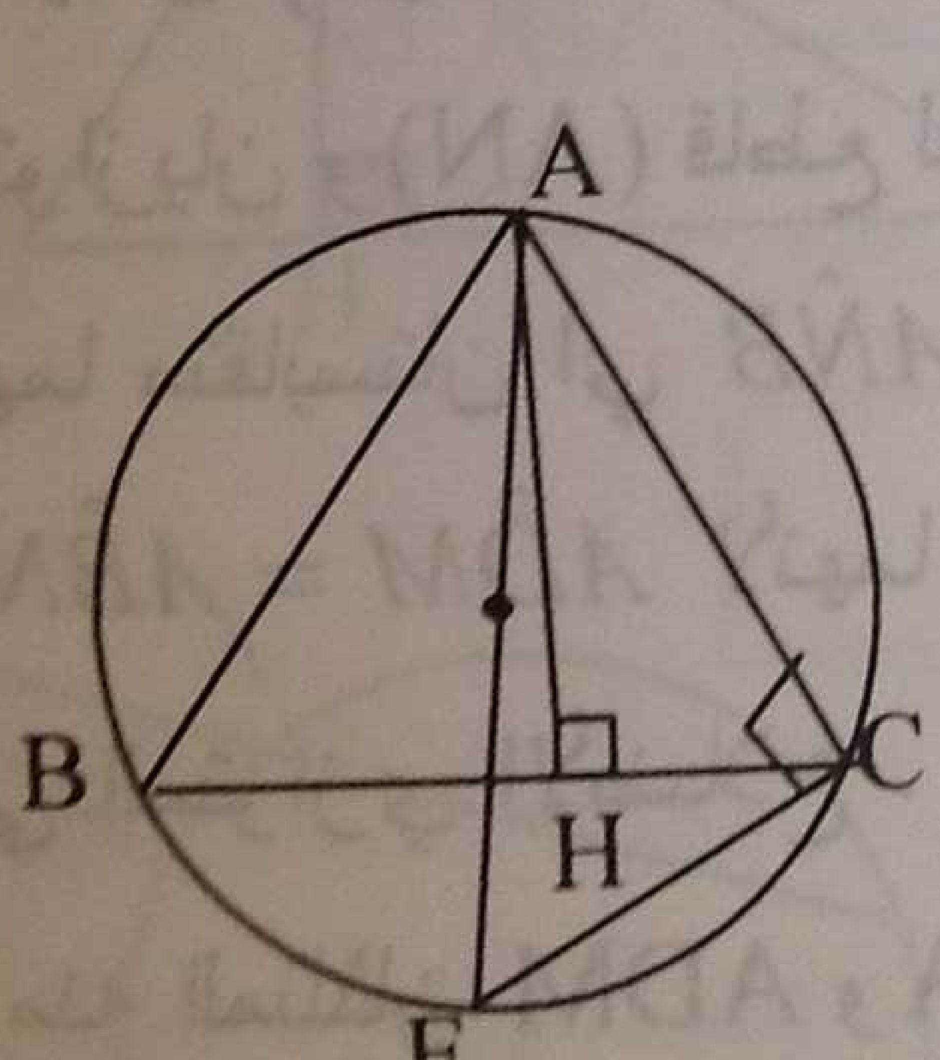
يستلزم المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

تطبيق 1:

ABC مثلث كيفي .(C) دائرة محيطة بهذا المثلث، E نقطة من (C) بحيث يكون [AE] قطرا للدائرة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

برهن أن $B\hat{A}H=E\hat{A}C$.

الحل :



نبين أن المثلثين BAH و AEC متشابهان .

في المثلث ABC لدينا $(BC)\perp(AH)$

أي $B\hat{H}A=90°$

في المثلث AEC، [AE] هو قطر في الدائرة (C)

و E نقطة من الدائرة (C).

إذن المثلث AEC قائم في C أي $A\hat{C}E=90°$ ومنه $B\hat{H}A=A\hat{C}E=90°$

ولدينا الزاويتان $A\hat{B}C$ و $A\hat{E}C$ متقايستان لأنهما زاويتان محيطيتان للدائرة (C) وتحصران نفس القوس $\widehat{AC}$ أي $A\hat{B}C = A\hat{E}C$

إذن حسب الحالة الأولى من تشابه مثلثين تساوي زاويتين من المثلث الأول مع زاويتين من المثلث الثاني $B\hat{H}A = A\hat{C}E$ و $A\hat{B}C = A\hat{E}C$ فإن المثلثين BAH و AEC متشابهان وعليه يكون $B\hat{A}H = E\hat{A}C$

<u>العلاقة بين أطوال أضلاع ومساحتا المثلثين :</u>

<u>تطبيق 2:</u>

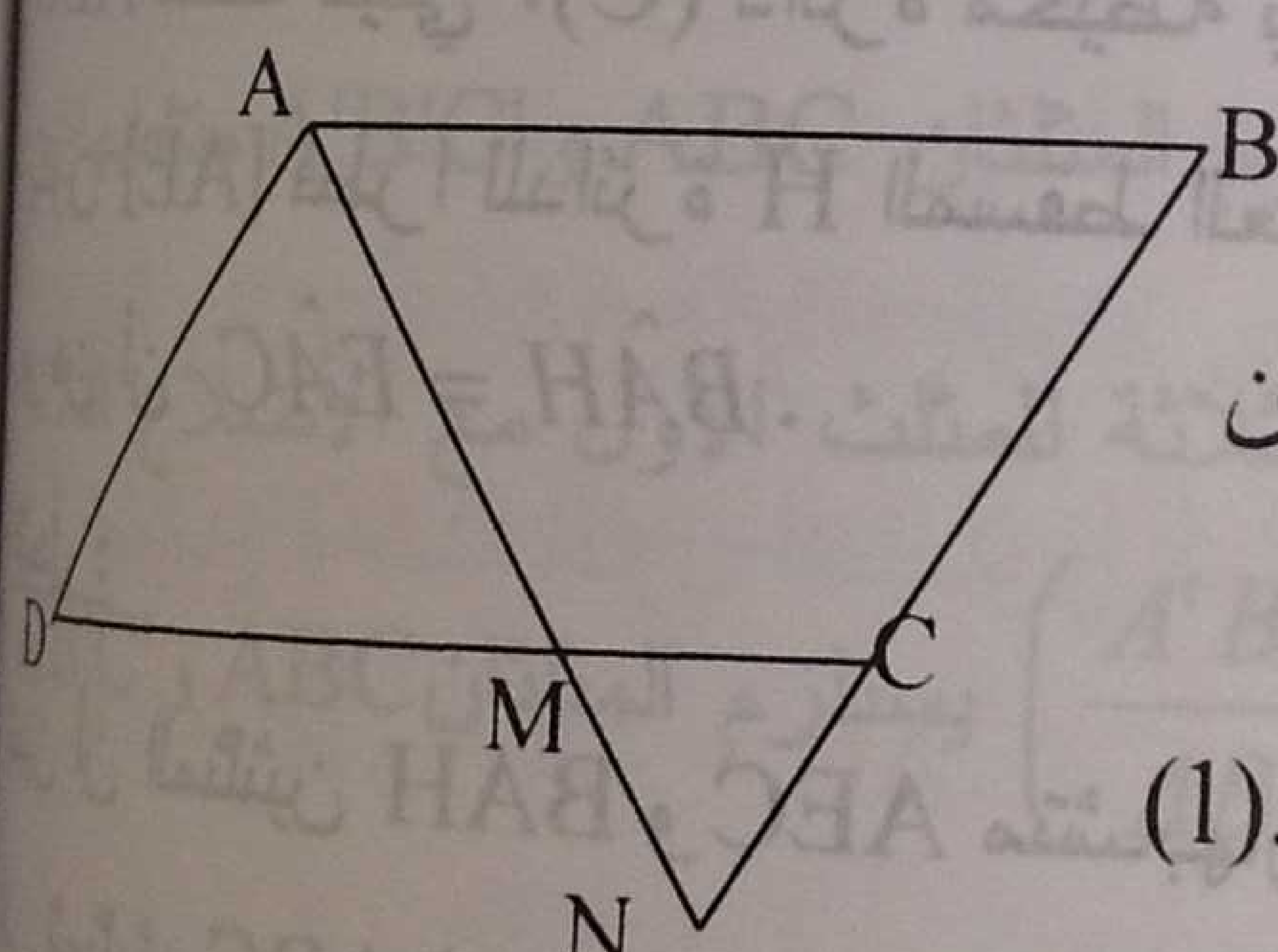
ABCD متوازي أضلاع حيث AB= 5cm ، AD= 3cm منصف الزاوية $B\hat{A}D$ يقطع الضلع [DC] في النقطة M ويقطع المستقيم (BC) في النقطة N

1) برهن أن المثلثين ADM وABN متشابهان ومتقايسا الساقين .

2) برهن أن $AM = \frac{3}{5}AN$

3) برهن أن $A_{ADN} = 0,36 \times A_{ABN}$ نرمز بـ A_{ABN} إلى مساحة المثلث ABN

<u>الحل :</u>



بما أن $D\hat{A}M$ و $A\hat{N}B$ زاويتان دخيلتان (لأن (AD) و(BC)) مستقيمان متوازيان و(AN) قاطع لهما .

فهما متقايستان أي $D\hat{A}M = A\hat{N}B$ ...(1)

$A\hat{D}M = A\hat{B}N$ لأنهما زاويتان متقابلتان في المتوازي الأضلاع .

ومنه المثلثان ADM وNBA متشابهان لتساوي زاويتين من المثلث الأول مع زاويتين من المثلث الثاني .

وبما أن المستقيم (AN) منصف للزاوية $D\hat{A}B$ فإن $D\hat{A}M = N\hat{A}B$ ...(2)

من المساويتين (1) و(2) نجد : $N\hat{A}B = A\hat{N}B$ وهذا معناه أن المثلث ANB متساوي الساقين رأسه الأساسي B.

بما أن NBA متساوي الساقين والمثلثان ADM و NAB متشابهان فإن المثلث ADM متساوي الساقين رأسه الأساسي D.

2) بما أن المثلثين ADM و ABM متشابهان فإن $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AN} = \frac{DM}{BN}$

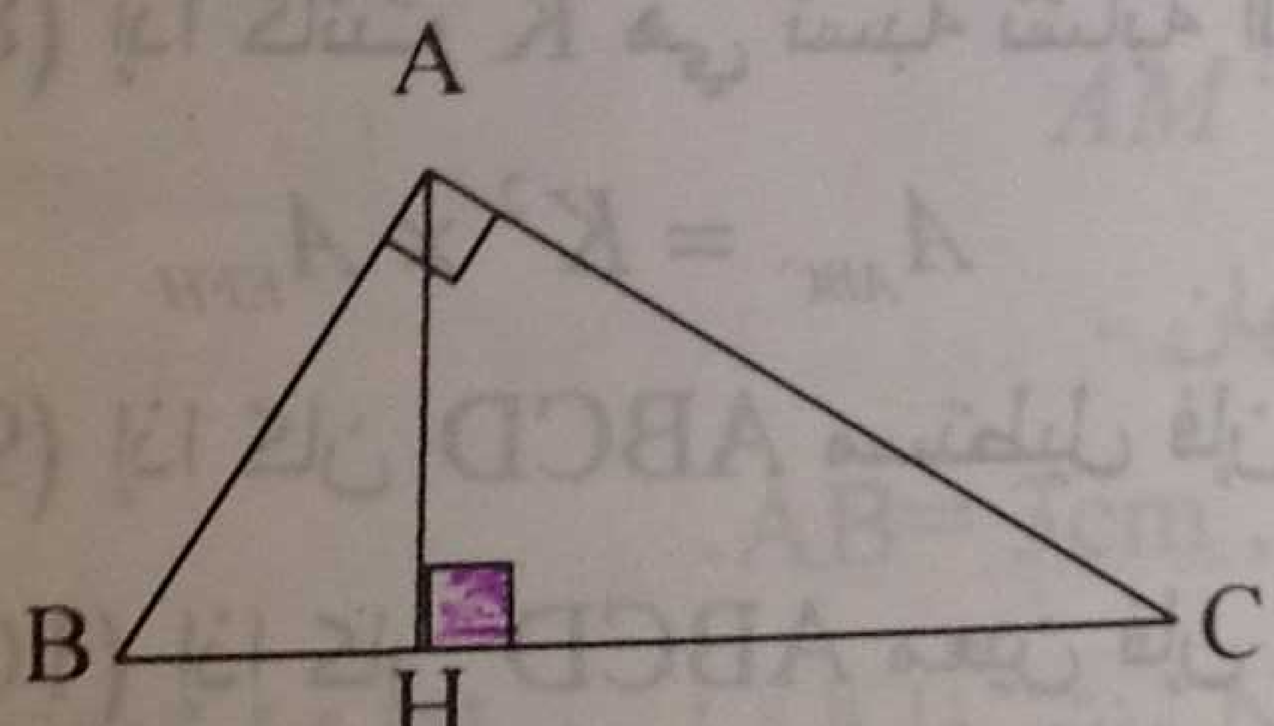
ولدينا $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$ إذن $\frac{AM}{AN} = \frac{3}{5}$ أي $AM = \frac{3}{5} AN$

3) نعلم أن نسبة تشابه المثلث ADM إلى المثلث ABN هي $\frac{3}{5}$. والنسبة بين مساحتي المثلثين ADN و ABN هي : $K^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,36$ إذن

$$A_{ADN} = 0,36 \times A_{ABN}$$

العلاقات المترية في مثلث قائم :

ABC مثلث قائم في A، H المسقط العمودي للنقطة A على الضلع [BC]



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

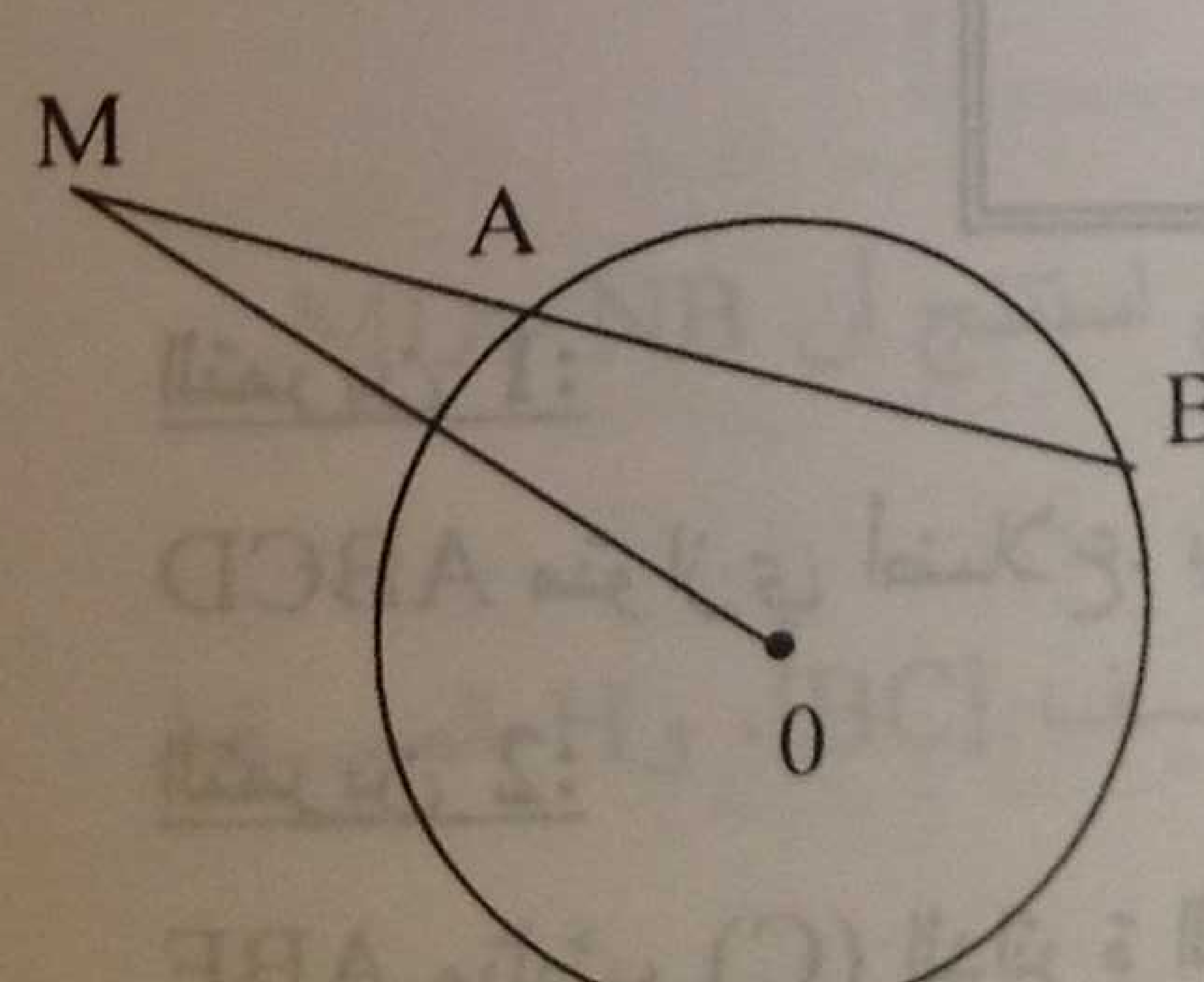
$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة :



لتكن (C) دائرة مركزها O، ونصف قطرها r.

(Δ) مستقيم يشمل M ويقطع الدائرة (C) في النقطتين A و B.

لتكن M نقطة كيفية من المستوي لا تقع على (C) نضع OM= d.

يسمى العدد الحقيقي $d^2 - r^2$ قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة (C) المعرف كما يلي :

$$d^2-r^2=\begin{cases} MA \times MB & \text{، (C) إذا كانت M خارج الدائرة} \\ -MA \times MB & \text{، (C) إذا كانت M داخل الدائرة} \end{cases}$$

<u>**اختبر معلوماتك :**</u> <u>بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)</u>

1) إذا تساوى ضلعان من المثلث الأول مع ضلعين من المثلث الثاني فإن هذين المثلثين متقايسان .

2) إذا كان مثلثان زاوية مشتركة فإنهما متشابهان .

3) كل مثلثين قائمين هما مثلثان متشابهان .

4) كل المثلثان المتقايسة الضلعين هي مثلثات متشابهة

5) إذا تقايس مثلثين فإن هذين المثلثين متشابهان .

6) إذا تشابه مثلثين فهما متقايسان .

7) كل المثلثات المتقايسة الأضلاع هي مثلثات متشابهة.

8) إذا كانت K هي نسبة تشابه المثلث ABC إلى المثلث EFH فإن

$$A_{ABC} = K^2 \times A_{EFH}$$

9) إذا كان ABCD مستطيل فإن المثلثين ABC وABD متشابهان .

10) إذا كان ABCD معين فإن المثلثينABD وABC متقايسان .

التمارين

<u>**التمرين 1:**</u>

ABCD متوازي أضلاع. برهن أن المثلثين ABC وACD متقايسان .

<u>**التمرين 2:**</u>

ABE مثلث، (C) الدائرة المحيطة بهذا المثلث. منصف الزاوية $B\hat{A}C$ يقطع الضلع [BC] في النقطة D ويقطع الدائرة (C) في النقطة F.

برهن أن $\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AE}$

التمرين 3:

(C) و(C') دائرتان مركزاهما O، O' على الترتيب ولهما نفس نصف القطر،

ولهما نفس المماس (d) في النقطة A المستقيم (Δ) الذي يشمل A يقطع

الدائرة (C) في النقطة M، ويقطع الدائرة (C') في النقطة P

برهن أن AM=AP

التمرين 4:

ABF مثلث متقايس الضلعين حيث : FA=FB=2,5cm ، AB= 1,5cm

1) أنشئ المثلث FBE نظير المثلث FBA بالنسبة للمستقيم (FB)

2) لتكن C نظيرة A بالنسبة إلى B . برهن أن $C\hat{B}E = A\hat{F}B$

3) احسب طول الضلع CE.

التمرين5:

ABC مثلث كيفي. ليكن $[Ax)$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$، وM نقطة من

نصف المستقيم $[Ax)$ حيث $AM^2 = AB \times AC$

1) برهن أن المثلثين AMC وAMB متشابهان .

2) أحسب AM إذا علمت أن AB= 3cm , AC = 5cm.

التمرين 6: ABCD متوازي أضلاع، M وN منتصفا الضلعين [AB]و[CD]

على الترتيب .

1) برهن أن المثلثين AMD و CNB متقايسان ثم استنتج أن MD= NB.

2) عين طبيعة الرباعي MDNB.

التمرين 7: ABC مثلث كيفي. لتكن M منتصف [BC]، وH المسقط

العمودي للنقطة A على الضلع [BC].

1) عبّر عن مساحتي المثلثين ABM وACM بدلالة BC و AH.

2) قارن بين المساحتين ثم أكمل القاعدة : "المتوسط في مثلث يقسم ......"

3) ليكن F نظيرة C بالنسبة إلى A. باستعمال القاعدة السابقة قارن بين مساحتي المثلثين ABC و ABF.

التمرين8 :

ABC مثلث حيث : AC=4,2cm ، BC= 3,9cm ، AB= 2,8cm.

لتكن M منتصف الضلع [AB] و F نقطة من الضلع [AC] حيث $A\hat{M}F = A\hat{C}B$.

1) أحسب الطولين AF و MF.

2) برهن أن $\frac{A_{AMF}}{A_{ABC}} = \frac{1}{9}$. (A_{ABC} تعبر عن مساحة المثلث ABC).

التمرين9 :

ABC مثلث متقايس الضلعين حيث AB= AC= 2BC. لتكن M و N منتصفا الضلعين [AC] و [AB] على الترتيب. برهن أن المثلثين متقايسين في كل حالة

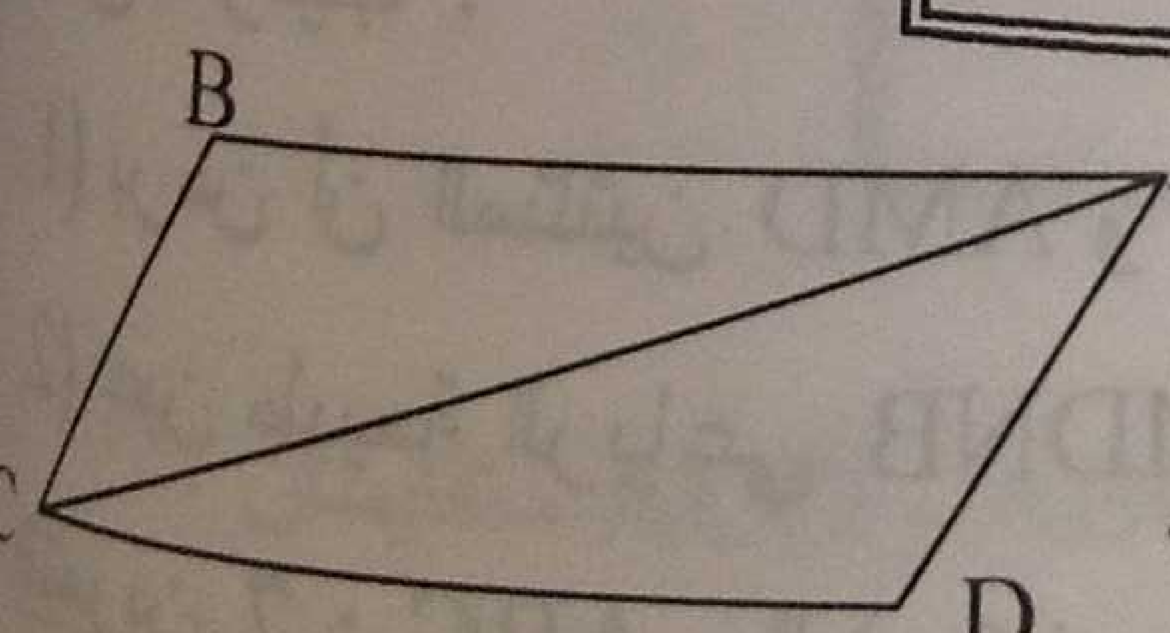
1) المثلثين AMB و ANC ، 2) المثلثين BMC و CNB.

التمرين 10 :

ABDE و BCFG مربعان مرسومان خارج المثلث الكيفي ABC برهن أن AG=DC (المربعان ليس لهما نفس طول الضلع) .

الحلول

حل التمرين 1:



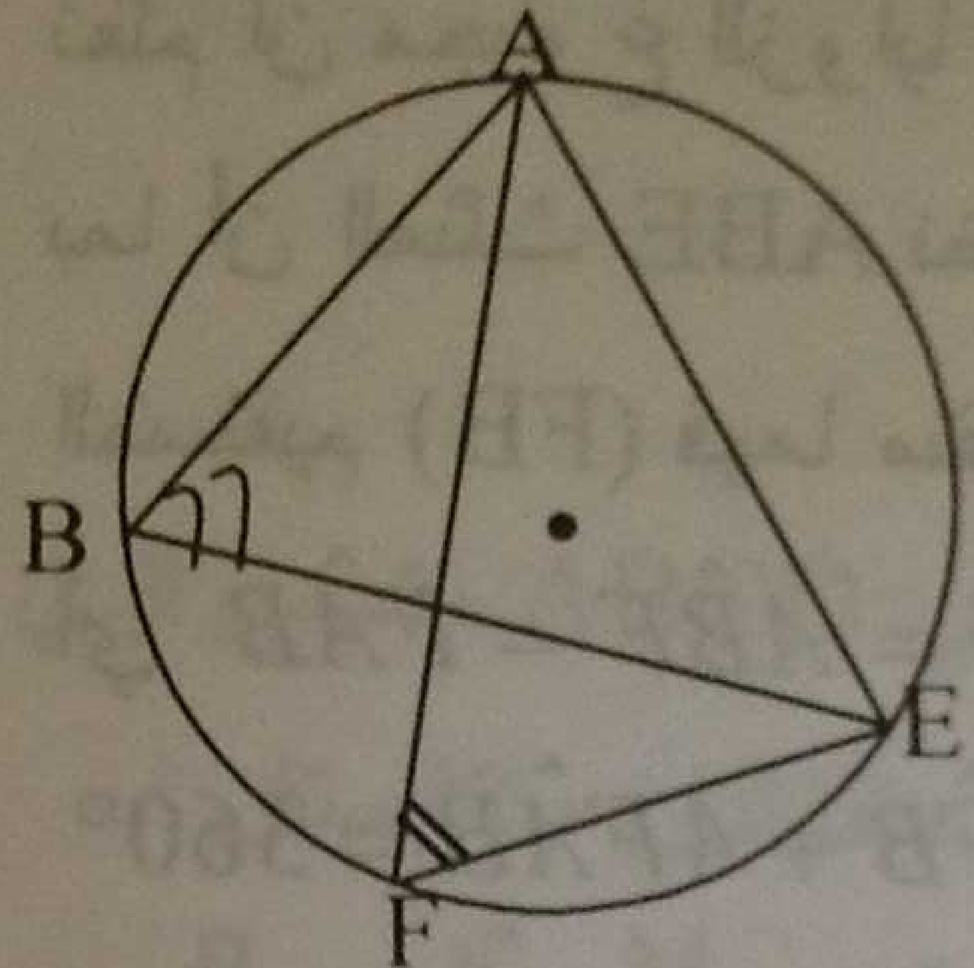
نقارن بين المثلثين ABC و ACD

AB= CD و BC= AC و AC ضلع مشترك .

إذن تقايست الأضلاع الثلاثة من المثلث ABC

مع الأضلاع الثلاثة من المثلث ACD.

ومنه حسب الحالة الثالثة فإن المثلثين ABC و ACD متقايسان .



حل التمرين 2:

لدينا في المثلثين ABD و AFE .

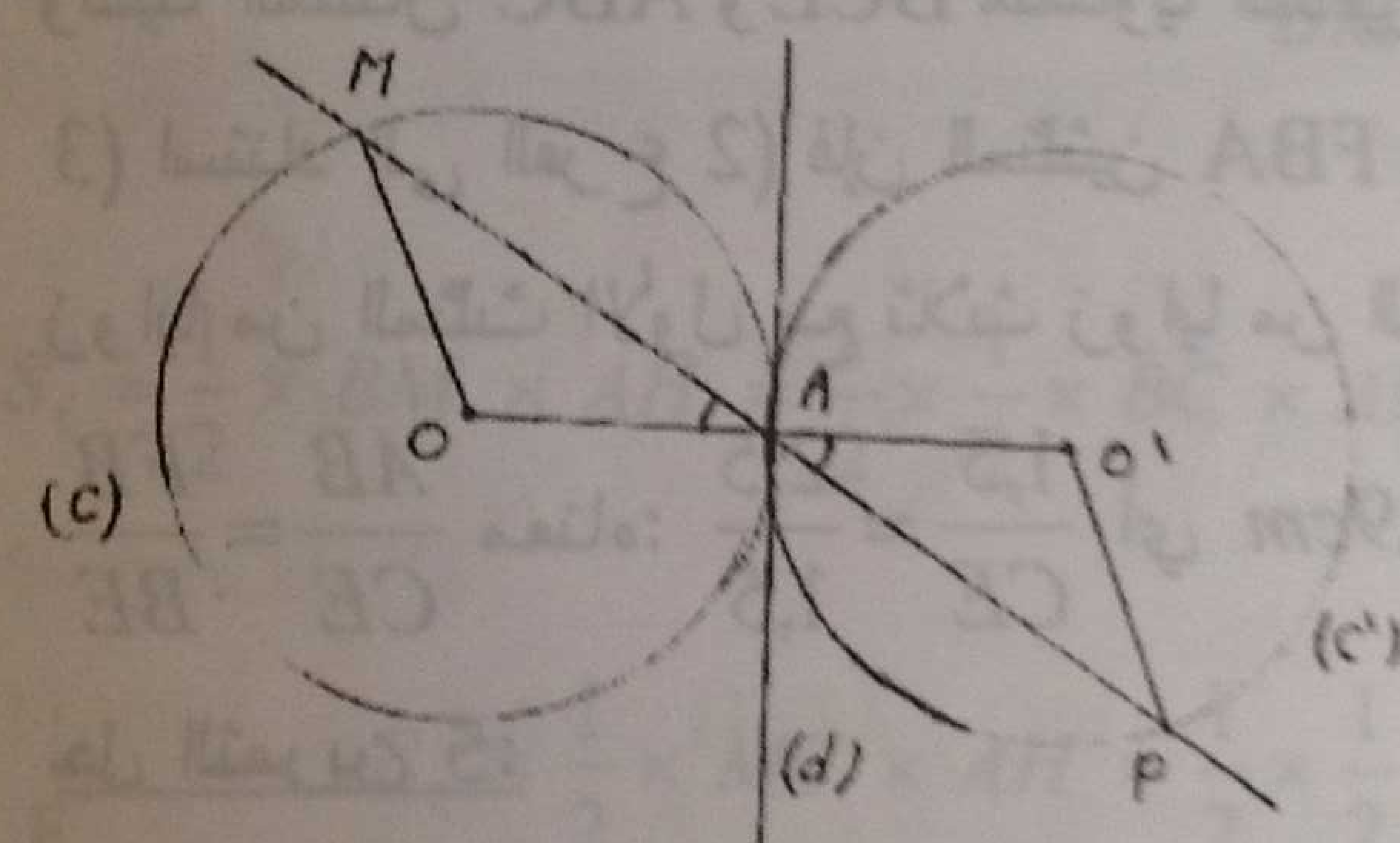
$F\hat{A}E = B\hat{A}D$ لأن (AF) منصف للزاوية $B\hat{A}E$

$A\hat{F}E = A\hat{B}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\widehat{AE}$.

إذن تساوت زاويتان من المثلث الأول مع زاويتين من المثلث الثاني ومنه المثلثان ABD و AFE متشابهان.

أي $\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{FE}$ إذن $\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AE}$

حل التمرين 3:



نقارن بين المثلثين AOM و AO'P بما أن (OA) و (O'A) عموديان على (d) (المماس للدائرتين في A).

فإن $O\hat{A}O' = 90° + 90° = 180°$

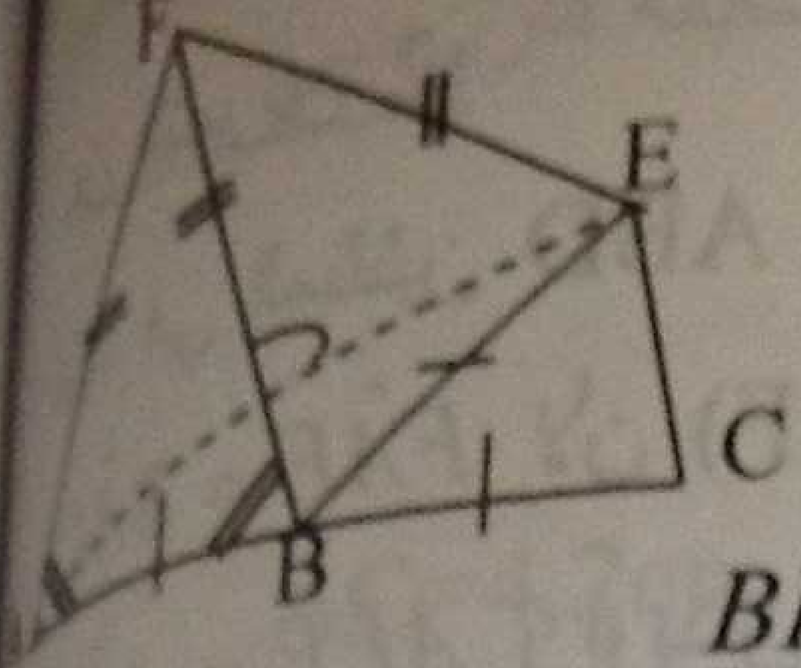
وهذا يعني أن الزاوية $O\hat{A}O'$ مستقيمة أي النقط O، A، O' على استقامة واحدة .

إذن OM=OA=O'A=O'P (لأن الدائرتان (C) و(C') لهما نفس نصف القطر) .

ولدينا المثلثان AOM و AO'P متساويا الساقين و $O\hat{A}M = O'\hat{A}P$ (متقابلتان بالرأس) ومنه $M\hat{O}A = A\hat{O'}P$ و $O'A = OA$ و $OM = O'P$

إذن المثلثان AOM و AO'P متقايسان ومن التقايس ينتج أن AM=AP

حل التمرين 4 : لدينا FA=FB=2,5cm ، AB=1,5cm



نعلم أن مجموع الزوايا الداخلية للرباعي تساوي 360°

بما أن المثلث ABE نظير المثلث ABF بالنسبة إلى المستقيم (FB) فهما متقايسان .

أي $B\hat{E}F = F\hat{B}E = A\hat{B}F = F\hat{A}B$ و $B\hat{F}E = A\hat{F}B$

$2A\hat{F}B + 4F\hat{A}B = 360°$ معناه: $A\hat{F}B + 2F\hat{A}B = 180°$ ...(1)

ولدينا في الرباعي $AFEC$: $2A\hat{F}B + 2F\hat{A}B + 2A\hat{C}E = 360°$

أي $A\hat{F}B + F\hat{A}B + A\hat{C}E = 180°$ ....(2) من العلاقتين (1) و(2) نجد:

$\hat{A}FB + 2F\hat{A}B = A\hat{F}B + F\hat{A}B + A\hat{C}E$ معناه $2F\hat{A}B = F\hat{A}B + A\hat{C}E$

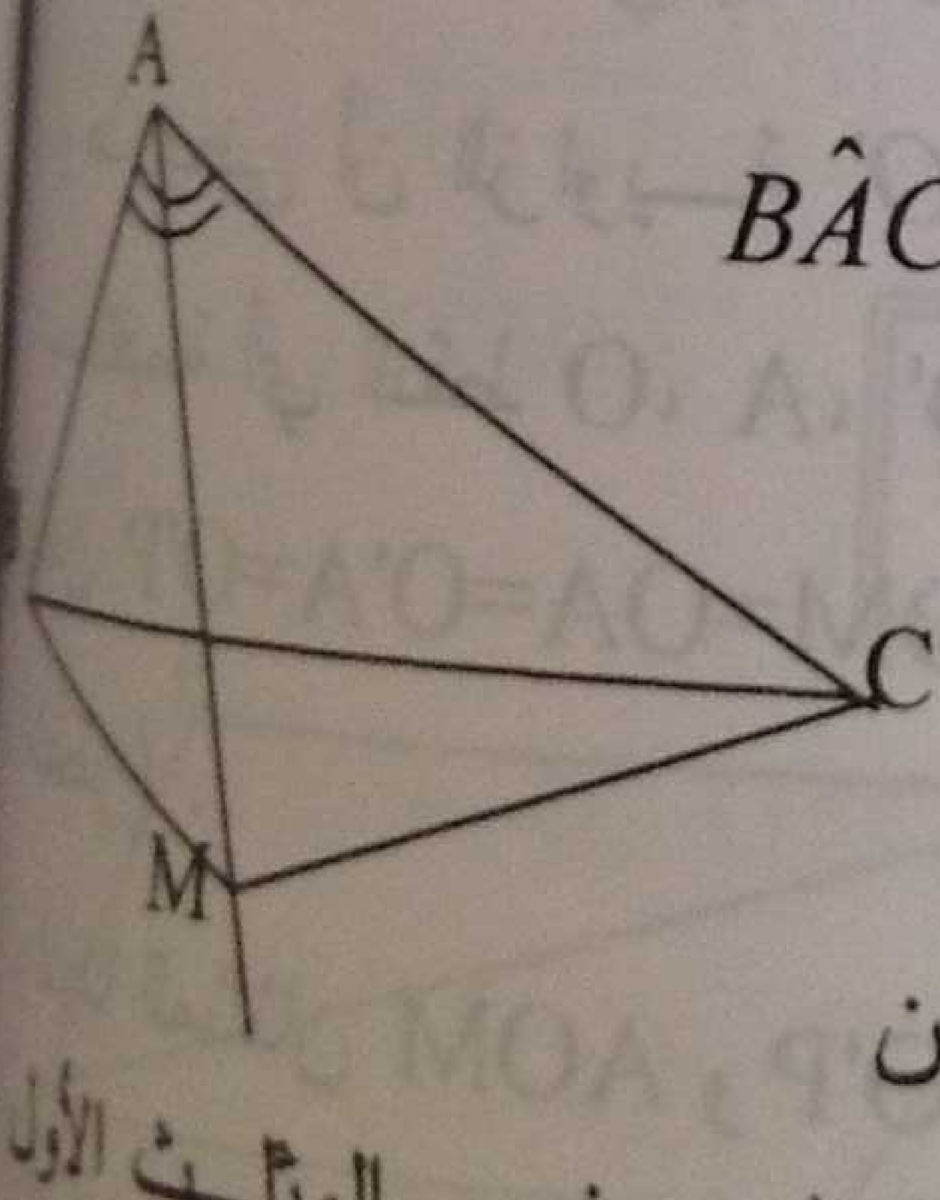
ومنه $F\hat{A}B = A\hat{C}E$ إذن $F\hat{A}B = F\hat{B}A = B\hat{C}E = B\hat{E}C$

ولدينا المثلثان ABC وBCE متساويا الساقين في F وB إذن $A\hat{F}B = C\hat{B}E$

3) استناد إلى الفرع 2) فإن المثلثين FBA وBCE متشابهان لتساوي ثلاث زوايا من المثلث الأول مع ثلاث زوايا من المثلث الثاني ويكون لدينا :

$\frac{AB}{CE} = \frac{FB}{BE}$ معناه: $\frac{1,5}{CE} = \frac{2,5}{1,5}$ أي $CE = \frac{(1,5)^2}{2,5} = 0,9cm$

حل التمرين 5:



1) $M\hat{A}C = B\hat{A}M$ لأن $[Ax)$ منصف للزاوية $B\hat{A}C$

$AM^2 = AB \times AC$ معناه: $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$

حسب الحالة الثانية من تشابه مثلثين .

إذا تناسب ضلعان من المثلث الأول مع الضلعين من المثلث الثاني وأن تساوي الزاوية المحصورة بالضلعين في المثلث الأول الزاوية المحصورة بالضلعين في المثلث الثاني إذن المثلثان AMC وAMB متشابهان .

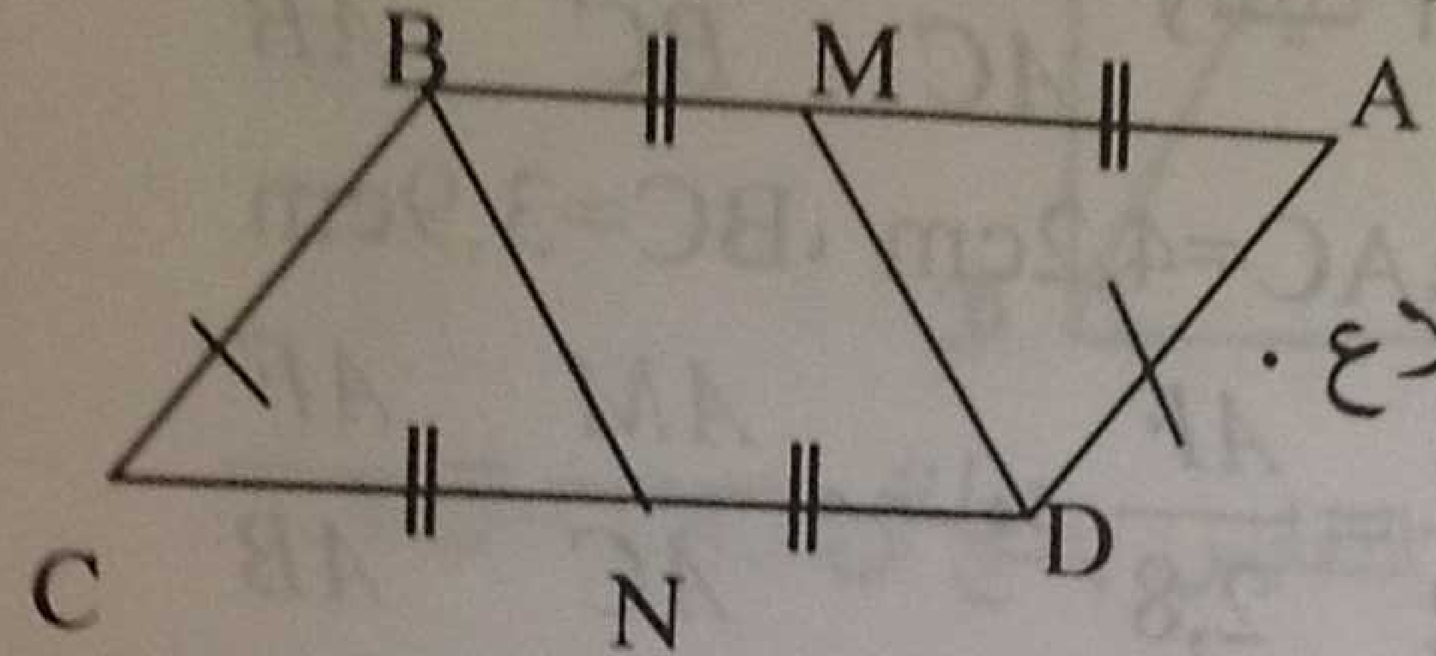
2) $AM^2 = AB \times AC$ معناه: $AM^2 = 3 \times 5 = 15$

أي $AM = \sqrt{15} = 3,8\ cm$

حل التمرين 6:

1) نقارن بين المثلثين AMD و CNB

$\hat{A} = \hat{C}$ و $BC = AD$ و $CN = AM$ لأن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فيه كل ضلعين متقابلين متقايسان وكل زاويتان متقابلتان متقايستان .



2) لدينا الرباعي MDNB .

BM=ND و (BM)//(ND) فهو متوازي أضلاع .

حل التمرين 7:

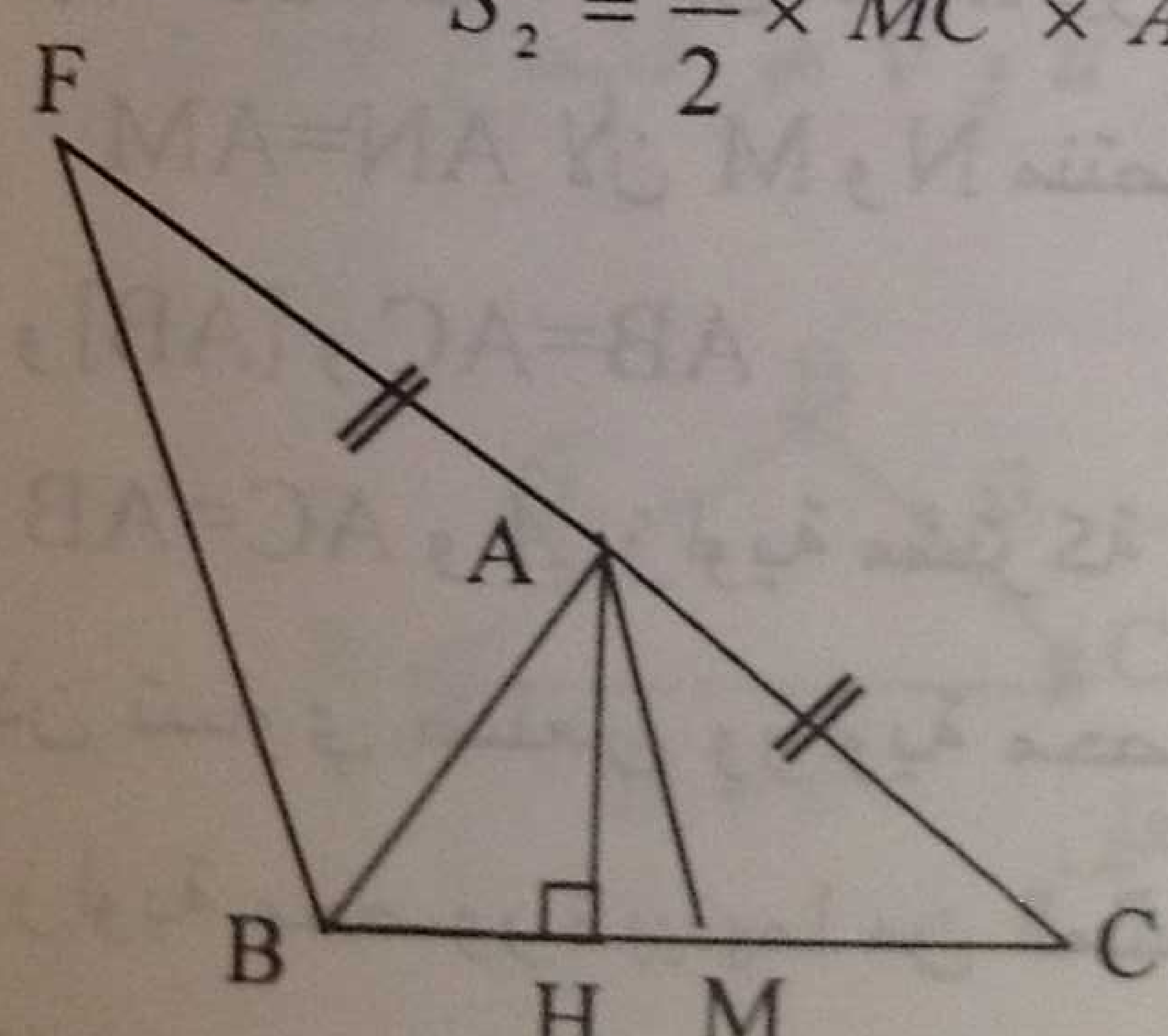
1) نعلم أن : $BM = MC = \frac{1}{2}BC$

مساحة المثلث ABM هي :

$$S_1 = \frac{1}{2} \times BM \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{4}BC \times AH$$

مساحة المثلث ACM هي :

$$S_2 = \frac{1}{2} \times MC \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{4}BC \times AH$$



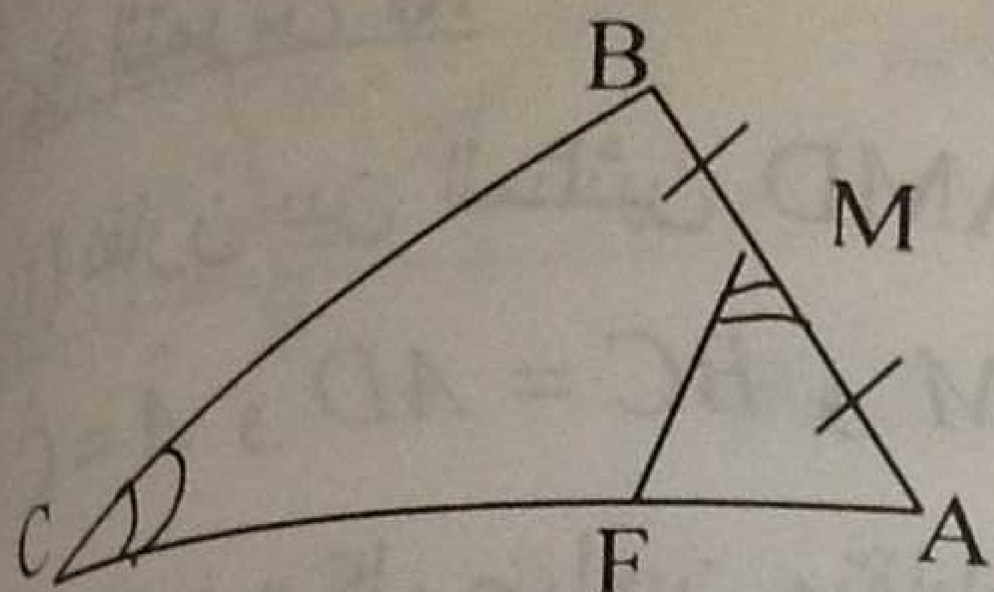
2) نلاحظ أن مساحتي المثلثين ABM و ACM متساويتان.

المتوسط في المثلث يقسم هذا المثلث إلى مثلثين لهما نفس المساحة .

3) بما أن F نظيرة C بالنسبة إلى A فإن (BA) هو متوسط في المثلث BCF واستنادا إلى القاعدة السابقة فإن مساحتي المثلثين ABC و ABF متساويتان.

حل التمرين 8:

1) نقارن بين المثلثين AMF و BCA $\hat{A}$ زاوية مشتركة و $A\hat{C}B = A\hat{M}F$



إذن تساوت زاويتان من المثلث الأول

مع زاويتين من المثلث الثاني ومنه

المثلثان AMF و BCA متشابهان ويكون لدينا:

$\frac{AM}{AC} = \frac{MF}{BC} = \frac{AF}{AB}$ ولدينا AB=2,8cm،

BC=3,9cm، AC=4,2cm، AM=1,4cm.

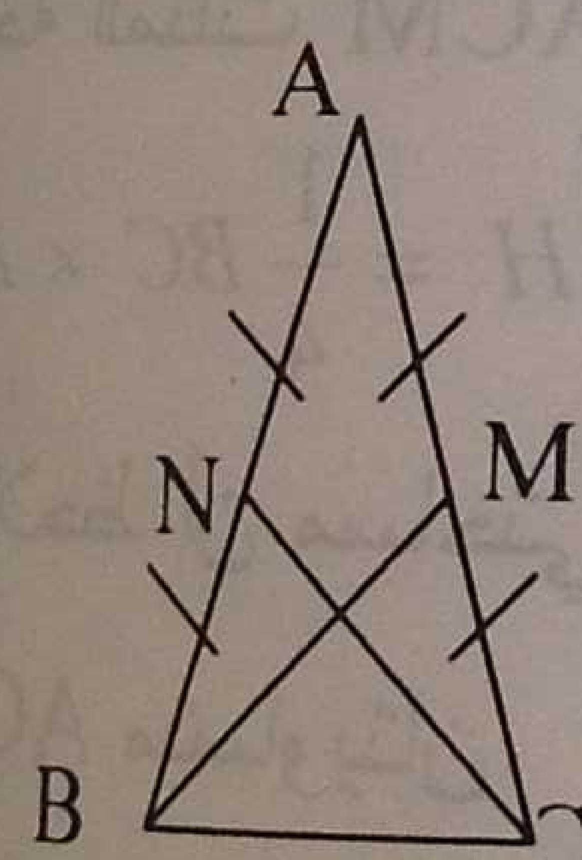
$\frac{AM}{AC} = \frac{AF}{AB}$ معناه: $\frac{1,4}{4,2} = \frac{AF}{2,8}$ ومنه $AF = \frac{1,4 \times 2,8}{4,2} = 0,9cm$

$\frac{AM}{AC} = \frac{MF}{BC}$ معناه: $\frac{1,4}{4,2} = \frac{MF}{3,9}$ ومنه $MF = \frac{1,4 \times 3,9}{4,2} = 1,3cm$

2) نعلم أن نسبة مساحة المثلث AMF إلى مساحة المثلث BCA هي K^2

حيث $K = \frac{AM}{AC}$. أي $K^2 = \left(\frac{1,4}{4,2}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ومنه $\frac{A_{AMF}}{A_{ABC}} = \frac{1}{9}$.

حل التمرين 9:



1) نقارن بين المثلثين AMB و ANC:

AN=AM لأن M و N منتصفا [AC]

و [AB] و AB=AC

AC=AB و $\hat{A}$ زاوية مشتركة .

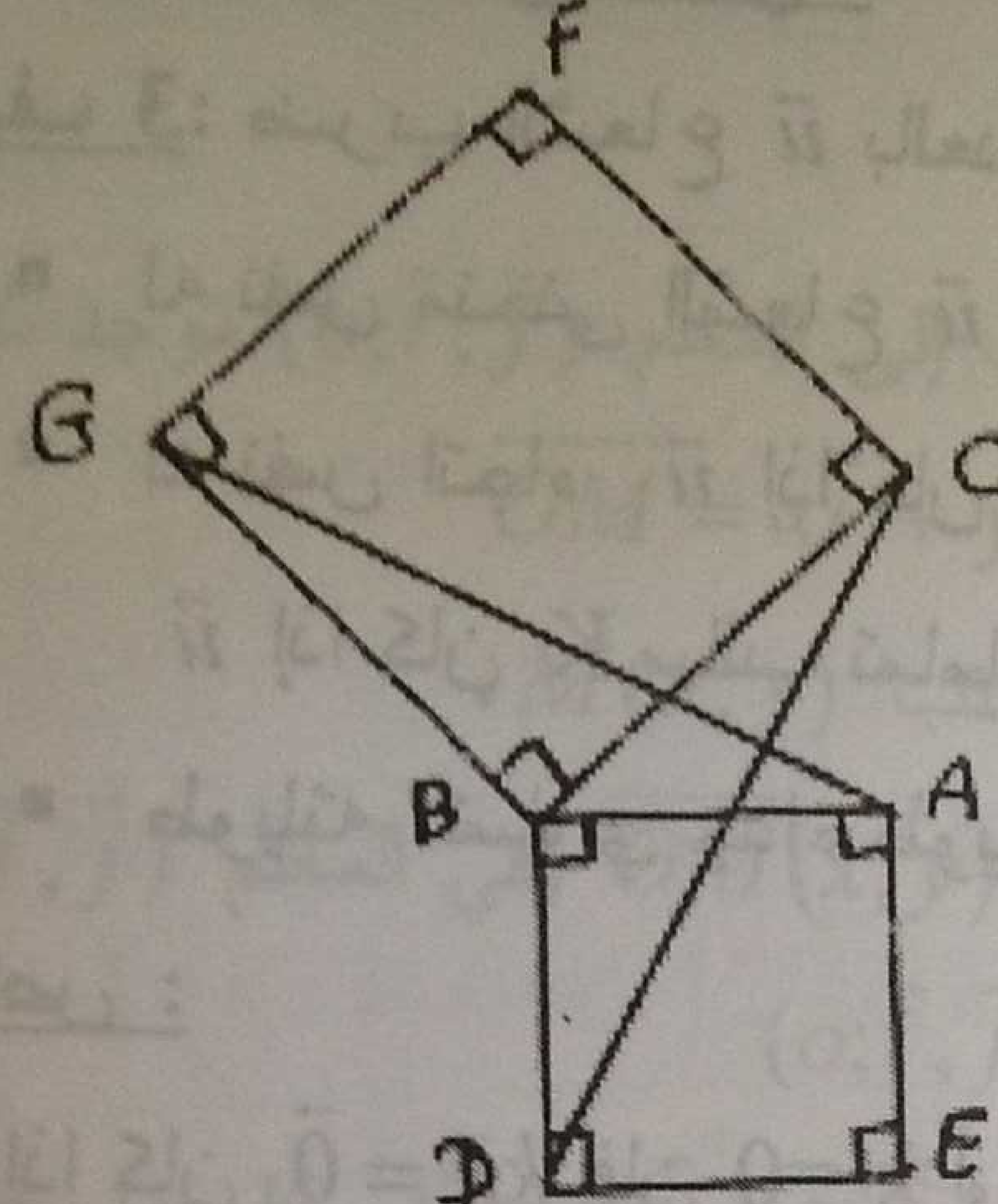
إذن تساوي ضلعان وزاوية محصورة بينهما من المثلث الأول مـع ضـلعين

وزاوية محصورة بينهما من المثلث الثاني. إذن المثلثان متقايسان.

2) نقارن بين المثلثين BMC و CNB:

BN=MC و $M\hat{C}B = N\hat{B}C$ و [BC] ضلع مشترك. حسب نفس الخاصية

السابقة فإن المثلثين BMC و CNB متقايسان.



حل التمرين 10:

• نقارن بين المثلثين BDC و GBA.

علما أن: AB=BD   AE=DE=

و BC= FC = GF= BG

• GB= BC و AB= BD

وبما أن $A\hat{B}D = G\hat{B}C = 90°$ فإن

$C\hat{B}D = A\hat{B}C + 90°$

و $A\hat{B}G = A\hat{B}C + 90°$

أي $A\hat{B}G = C\hat{B}D$ ومنه المثلثان متقايسان ومن التقايس ينتج أن AG= DC

11 المعلم في المستوي – الأشعة

معارف

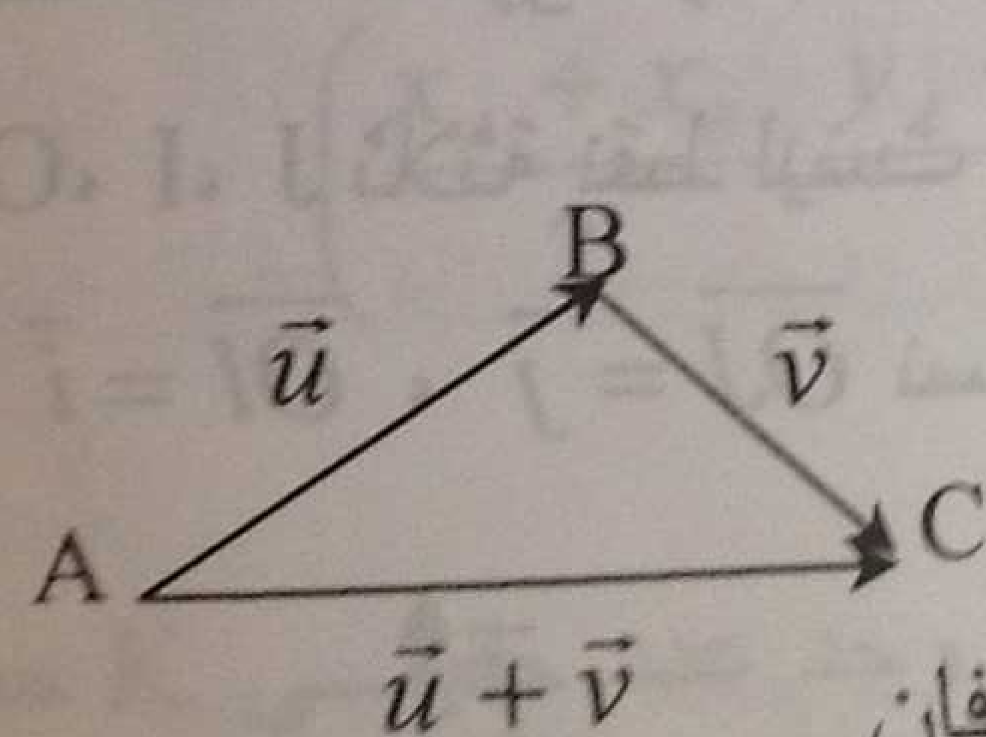
العمليات على الأشعة :

تعريف 1: يتساوى شعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ إذا كان الرباعي ABCD متوازي أضلاع (A، B، C، D ليست على استقامة واحدة).

تعريف 2: ليكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعين جمع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$.

إذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ فإن

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



ملاحظة :

1) إذا كانت A، B، C ثلاث نقط من المستوي فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ علاقة شال.

2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ، $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

تعريف 3: ضرب الشعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقي K غير المعدوم هو الشعاع $K\vec{u}$

- له نفس منحنى الشعاع $\vec{u}$
- له نفس اتجاه $\vec{u}$ إذا كان K موجب تماما وله اتجاه معاكس للشعاع $\vec{u}$ إذا كان K سالب تماما .
- طويلته تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد |K|

خواص :

1) إذا كان $k\vec{u}=\vec{0}$ فإن k =0 أو $\vec{u}=\vec{0}$

2) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان و a ، b عددان حقيقيان فإن :

$$a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v} \quad . \quad (a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u} \quad .$$

$$a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$$

3) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان لهما نفس المنحنى ، فإنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم K : $\vec{v}=k\vec{u}$ أي $\vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}$.

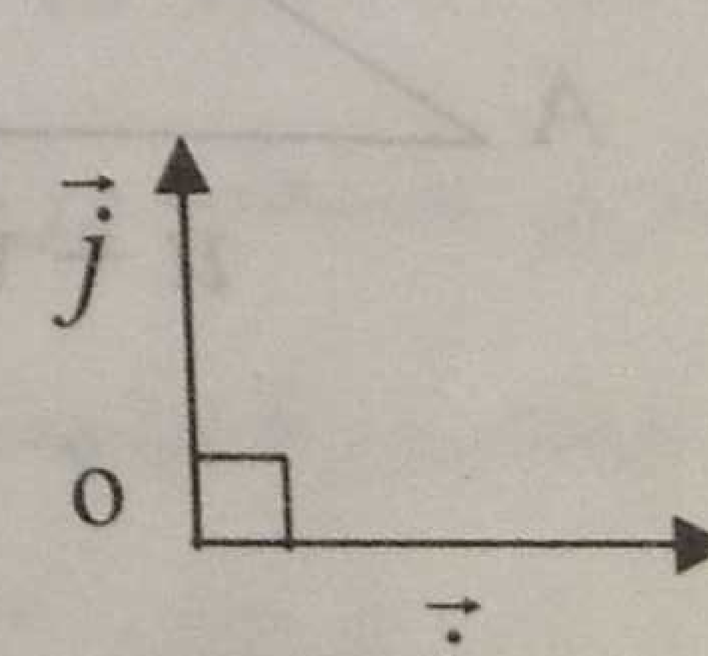
ملاحظة : مهما كان العدد الحقيقي K والشعاع $\vec{u}$ فإن: $o\vec{u}=\vec{o}$ ، $k\vec{o}=\vec{o}$

✓ **أنواع المعالم :**

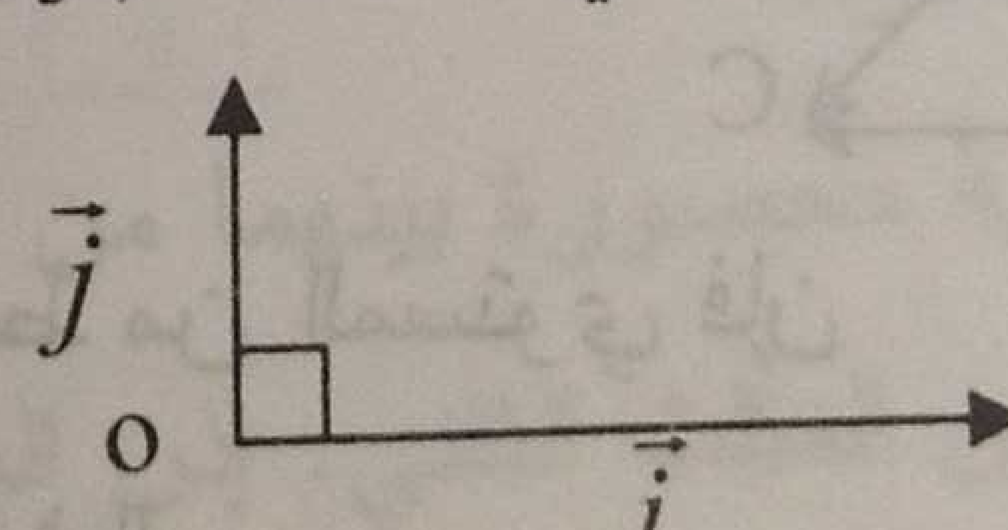
كل ثلاث نقط متمايزة ليست على استقامة واحدة تشكل معلما للمستوي.

لتكن O ، I ، J ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة .

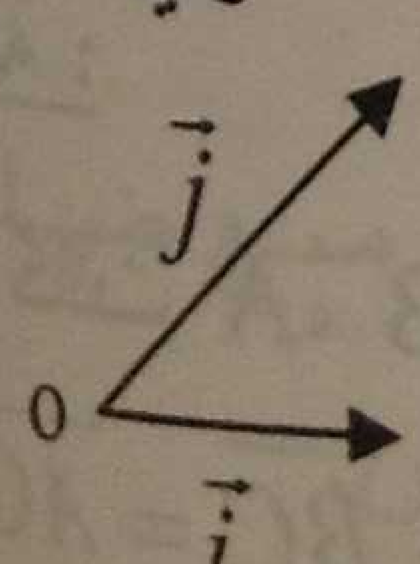
نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ نسمي الثلاثية $(o;\vec{i},\vec{j})$ معلما للمستوي



معلم متعامد ومتجانس ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ متعامدان ولهما نفس الطول)



معلم متعامد ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ متعامدان)



معلم كيفي ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ كيفيان)

الخاصية 1: في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ توجد ثنائية

من أجل كل نقطة M من المستوي المنسوب إلى المعلم $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$(x;y)$ وحيدة من الأعداد الحقيقة بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

تسمى الثنائية $(x;y)$ احداثيتا النقطة M ونكتب $M(x;y)$.

وتسمى أيضا إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ونكتب $\overrightarrow{OM}(x;y)$ (في المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$

الخاصية 2: المستوي منسوب إلى المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. K عدد حقيقي

1) يتساوى الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$ و $y = y'$

2) مركبا الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $(x+x';y+y')$ أي

$\vec{u}+\vec{v} = (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j}$

3) مركبتا الشعاع $k\vec{u}$ هما $(kx;ky)$ أي $k\vec{u} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$

4) لتكن A و B نقطتان من المستوي إحداثياتها $(x_A;y_A)$ ، $(x_B;y_B)$ على الترتيب.

* احداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B - x_A;y_B - y_A)$ أي

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

* احداثيتا منتصف القطعة [AB] هما $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

✓ **الأشعة المتوازية :**

تعريف : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين إذا وجد عدد حقيقي K حيث : $\vec{u} = k\vec{v}$ (أو $\vec{v} = k\vec{u}$).

الخاصية 3: في المستوي المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين وفقط إذا كانت احداثياتهم تشكل تناسبا .

✓ **شرط توازي شعاعين :**

الخاصية 4:

يكون الشعاعان $\vec{u}(a;b)$ ، $\vec{v}(c;d)$ متوازيين إذا وفقط إذا كان الجدول

a	c
b	d

هو جدول تناسبية أي $ad = dc$ أو $ad - bc = 0$

تطبيق 1: هل الشعاعان $\vec{u}(3;-2)$ ، $\vec{v}(-15;10)$ متوازيان ؟

الحل : بما أن الجدول يمثل وضعية تناسبية فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان

و $\vec{v} = -5\vec{u}$

3	-15
-2	10

✓ **شرط توازي مستقيمين واستقامية نقط :**

الخاصية 5 :

لتكن $A \neq B$ و $C \neq D$. يكون المستقيمان (AB) و(CD) متوازيان إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيين.

تكون النقط A،B، C على استقامة واحدة (استقامية) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيين .

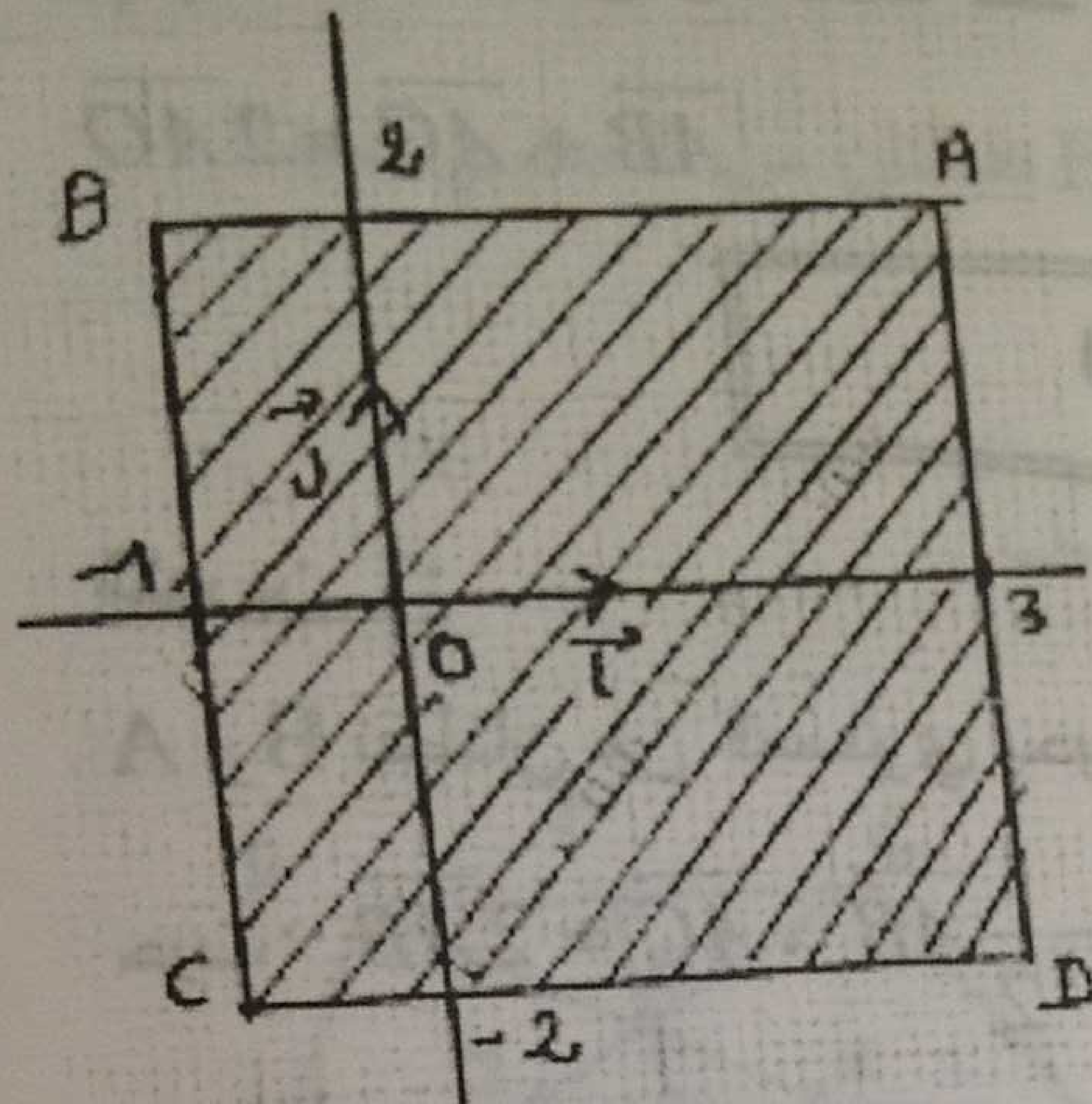
مجموعة النقط من المستوي :

تطبيق 2:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

أنشئ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $|x-1| \leq 2$ و $|y| \leq 2$

الحل :



$|x-1| \le 2$ معناه: $-2 \le x-1 \le 2$ أي

$-1 \le x \le 3$

$|y| \le 2$ معناه: $-2 \le y \le 2$

الحل البياني للمتراجحة $-1 \le x \le 3$ هو شريط مغلق محدد بالمستقيمين ذي المعادلتين $x=-1$ و $x=3$.

والحل البياني للمتراجحة $-2 \le y \le 2$ هو شريط مغلق محدد بالمستقيمين ذي المعادلتين $y=-2$ و $y=2$.

إن مجموعة النقط المطلوبة هي تقاطع الشريطين أي هي مجموعة النقط التي تقع على المربع وداخل المربع ABCD.

اختبر معلوماتك : بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1) إذا كانت F منتصف [AB] فإن $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$

2) إذا كان $\vec{u} = k\vec{v}$ فإن طويلة الشعاع $\vec{u}$ يساوي جداء العدد k بالشعاع $\vec{v}$.

3) إذا كان $\overrightarrow{OM} - 3\vec{i} + 4\vec{j} = \vec{o}$ فإن احدثيتا M هما $(-3;4)$ في المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$

4) كل شعاعين متوازيين هما شعاعان متساويان.

5) إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويين فهما متوازيان.

6) إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيين فإن النقط D،C،B،A على استقامة واحدة.

7) إذا كانت النقط D،C،B،A على استقامة واحدة فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيان.

8) يوجد عدد غير منته من الأشعة المتوازية مع الشعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$.

9) إذا كانت A،B،C، ثلاث نقط من المستوي و O منتصف [BC] فإن

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$

التمارين

التمرين 1:

A و B نقطتان من المستوي بحيث AB=4cm. أنشئ النقط C،D،E،F،H

حيث: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{EA}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{HB}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{BC}$.

التمرين 2: أكتب بدلالة الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كلا من الأشعة التالية :

$\vec{w}_1=3(\vec{u}-\vec{v})-4(\vec{u}+\vec{v})$ ، $\vec{w}_2=-4(\vec{u}-2\vec{v})+5(3\vec{u}-2\vec{v})$

$\vec{w}_3=\frac{-1}{2}(\vec{u}+5\vec{v})-5\left(\vec{u}-\frac{\vec{v}}{10}\right)$ ، $\vec{w}_4=\frac{-2}{3}(\vec{u}-5\vec{v})+\frac{2}{7}\left(14\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}\right)$

التمرين 3:

المستوي منسوب إلى معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$، $\vec{u}$ شعاع حيث $\vec{u}=4\vec{i}-3\vec{j}$ و A(-2;1)

1) عين إحداثيتا النقطة P بحيث : $\overrightarrow{AP}=3\vec{u}$

2) عين احداثيتا النقطة N بحيث : $\overrightarrow{AN}=-2\vec{v}$ علما أن $\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$

3) عين احداثيتا النقطة R بحيث $2\overrightarrow{AR}=3\vec{u}-2\vec{v}$

التمرين 4:

1) هل الشعاعان $\vec{u}(4,-5)$ ، $\vec{v}(28;-35)$ متوازيان ؟

2) هل النقط $A(-6;3)$ ، $B(2;1)$ ، $C\left(3;\frac{3}{4}\right)$ على استقامة واحدة ؟

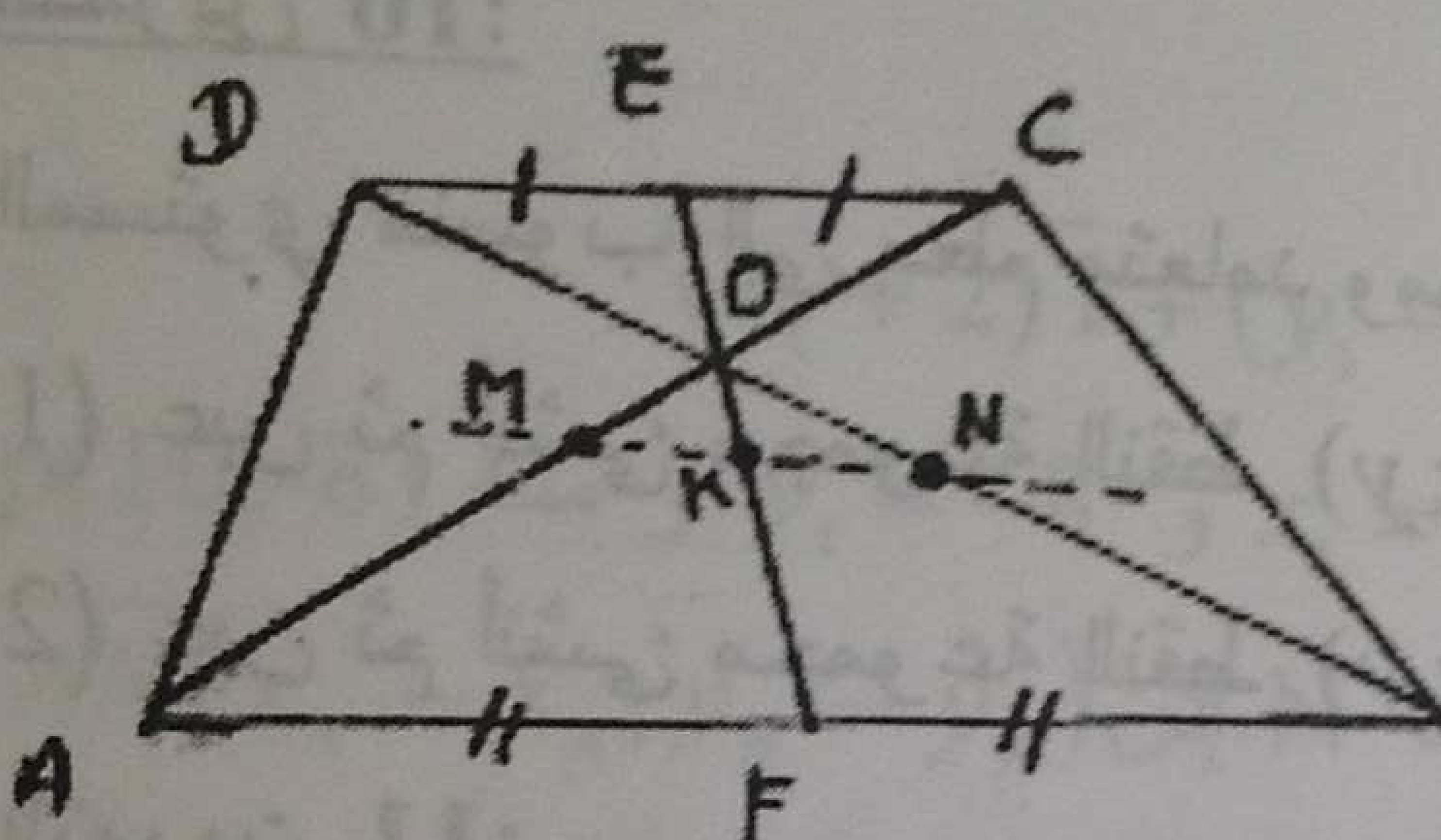
التمرين 5:

ABCD متوازي أضلاع، O مركزه، E و F نقطتان من المستوي بحيث :

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

برهن أن للقطعتين [OB] و [EF] نفس المنتصف .

التمرين 6:



ABCD شبه منحرف قاعدتاه : [AB] و [DC] حيث AB=2DC و M، N، E، F منتصفات الأضلاع [AC] ، [BD] ، [DC] ، [AB] على الترتيب و k منتصف [MN].

O نقطة تقاطع القطرين [AC] و [DB] نعتبر المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

1) عين احداثيات النقط A، B، C، D، E، F، M، N.

2) استنتج احداثيات النقطة K.

التمرين 7:

عين في كل حالة هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟

1) A(2;3) ، B(-1;5) ، C(-3;-1) ، D(0;1)

2) $A(-\sqrt{6};3)$ ، $B(-6,\sqrt{6})$ ، $C(2;\sqrt{6})$ ، $D(3;-2\sqrt{6})$

التمرين 8:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ النقط $A(x;2)$ ، $B(-1;x)$ ، $C(1,-2)$ ، x عدد حقيقي . عين العدد الحقيقي x بحيث يكون:

1) النقط A، B، C على استقامة واحدة

2) الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متساويين .

التمرين 9:

هل الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان من أجل كل عددين حقيقيين x و y في كل حالة :

1) $\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(5x;5y)$ ، 2) $\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(|x|;|y|)$

3) $\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(3x-5;3y-5)$ ، 4) $\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(x^2;y^2)$

التمرين 10:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) عين ثم أنشئ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x\ge 1$ و $y\le -1$

2) عين ثم أنشئ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $-1\le x\le 1$ و $y\ge 0$

التمرين 11:

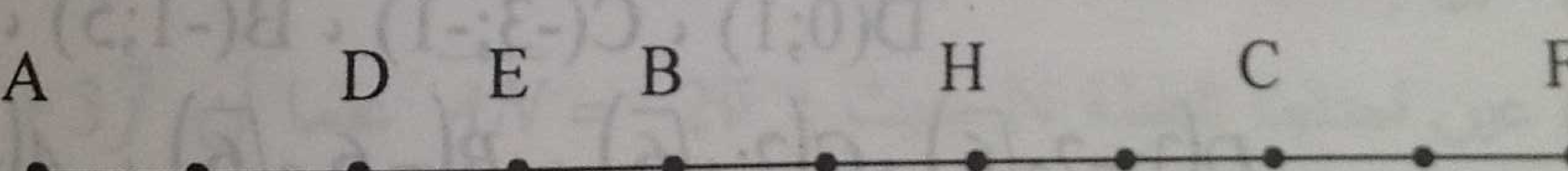
$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من المستوي حيث: $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ،

$\vec{v}=-8\vec{i}+12\vec{j}$ ، $\vec{w}=\frac{-1}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}$.

ادرس توازي الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ مثنى مثنى

الحلول

حل التمرين 1:



حل التمرين 2:

$$\vec{w}_1=3(\vec{u}-\vec{v})-4(\vec{u}+\vec{v})=3\vec{u}-3\vec{v}-4\vec{u}-4\vec{v}=-\vec{u}-7\vec{v}$$

$$\vec{w}_2=-4(\vec{u}-2\vec{v})+5(3\vec{u}-2\vec{v})=-4\vec{u}+8\vec{v}+15\vec{u}-10\vec{v}=11\vec{u}-2\vec{v}$$

$$\vec{w}_3=\frac{-1}{2}(\vec{u}+5\vec{v})-5(\vec{u}-\frac{1}{10}\vec{v})=\frac{-1}{2}\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}-5\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=-\frac{11}{2}\vec{u}-2\vec{v}$$

$$\vec{w}_4 = \frac{-2}{3}(\vec{u} - 5\vec{v}) + \frac{2}{7}\left(14\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\right) = \frac{-2}{3}\vec{u} + \frac{10}{3}\vec{v} + 4\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}$$
$$= \frac{-17}{21}\vec{u} + \frac{22}{3}\vec{v}$$

حل التمرين 3:

1) نرمز بـ $(x_1;y_1)$ إلى إحداثيتي النقطة P إذن $\overrightarrow{AP}(x_P - x_A; y_P - y_A)$

أي $\overrightarrow{AP}(x_1+2; y_1-1)$

$\overrightarrow{AP}=3\vec{u}$ معناه: $(x_1+2)\vec{i} + (y_1-1)\vec{j} = 3(4\vec{i} - 3\vec{j})$

$x_1+2=12$ و $y_1-1=-9$ إذن $x_1=10$ و $y_1=-8$ و منه p(10;-8)

2) نرمز ب $(x_2;y_2)$ إلى احداثيتي النقطة N.إذن $\overrightarrow{AN}(x_N - x_A; y_N - y_A)$

أي $\overrightarrow{AN}(x_2+2; y_2-1)$ $\overrightarrow{AN} = -2\vec{V}$

معناه: $(x_2+2)\vec{i} + (y_2-1)\vec{j} = -2(5\vec{i}+3\vec{j}) = -10\vec{i} - 6\vec{j}$

أي $x_2+2=-10$، $y_1-1=-6$ إذن $x_2=-12$ و $y_2=-5$

ومنه N(-12;-5).

3) نرمز $(x_3;y_3)$ إلى احداثيتي النقطة R. إذن $\overrightarrow{AR}(x_3+2; y_3-1)$

أي $2\overrightarrow{AR}(2x_3+4; 2y_3-2)$. $2\overrightarrow{AR} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

معناه: $(2x_3+4)\vec{i} + (2y_3-2)\vec{j} = 3(4\vec{i} - 3\vec{j}) - 2(5\vec{i}+3\vec{j})$

أي $(2x_3+4)\vec{i} + (2y_3-2)\vec{j} = 2\vec{i} - 15\vec{j}$

إذن $2x_3+4=2$ و $2y_3-2=-15$ أي $x_3=-1$, $y_3=\frac{-13}{2}$

ومنه $\vec{R}(-1;\frac{-13}{2})$

حل التمرين 4:

1) لدينا $\vec{u}(4;-5)$ ، $\vec{v}(28;-35)$

4	28
-5	-35

بما أن الجدول يمثل وضعية تناسب فإن الشعاعين $\vec{4}$ ،$\vec{v}$

متوازيان و $\vec{v} = \overrightarrow{7u}$

2) تكون النقط C,B,A على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كـان الشـعاعين $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AB}$ متوازيين .

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (2+6)\vec{i} + (1-3)\vec{j} = \vec{8i} - \vec{2j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_c - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (3+6)\vec{i} + (\frac{3}{4} - 3) = \vec{9i} - \frac{9}{4}\vec{j}$$

8	9
-2	$-\frac{9}{4}$

بما أن الجدول يمثل وضعية تناسبية فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان

و $\overrightarrow{AB} = \frac{8}{9}\overrightarrow{AC}$.

إذن النقط C,B,A تقع على استقامة واحدة .

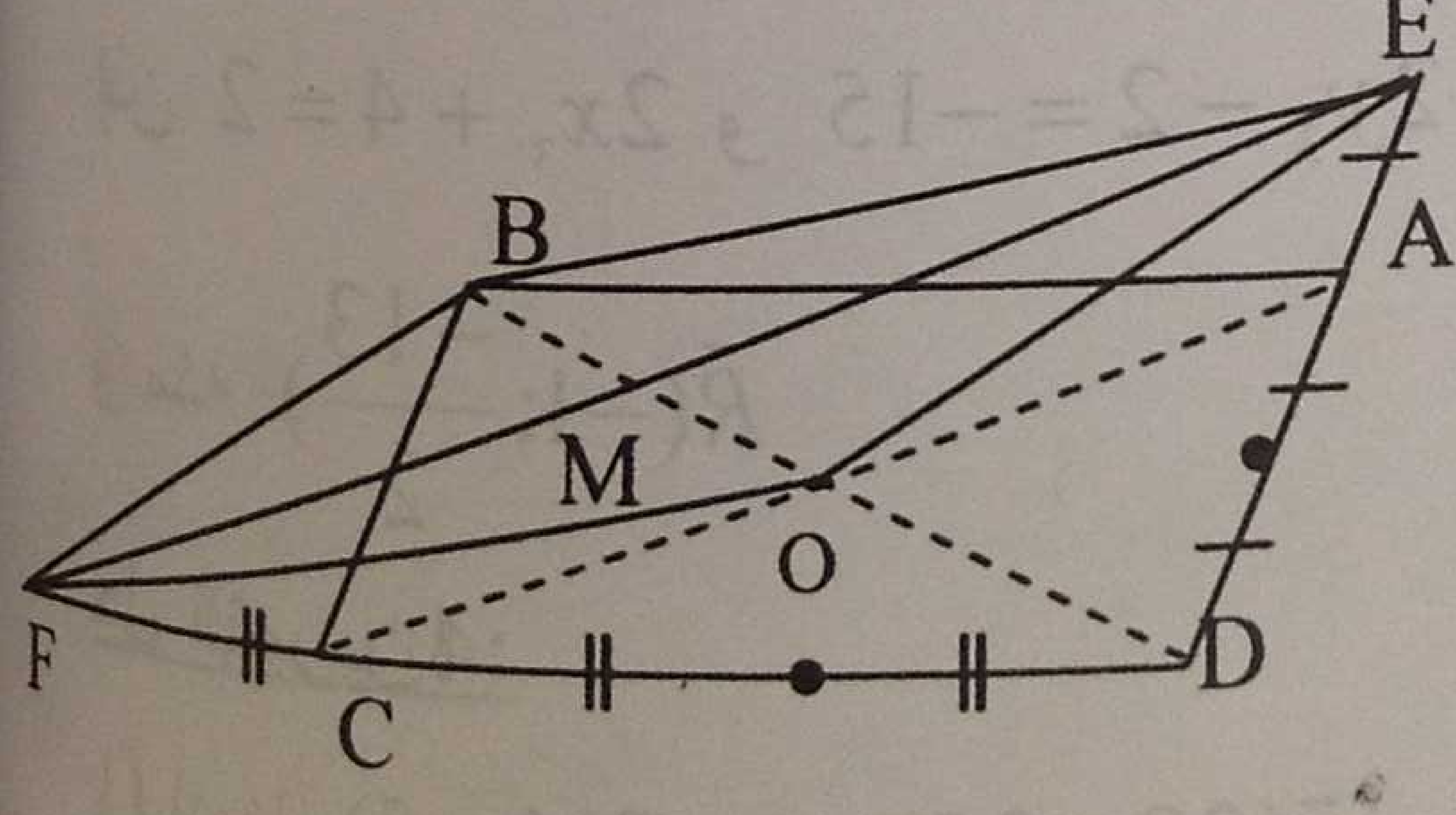
<u>حل التمرين 5 :</u>

نعلم أن: $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$، $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

لكي نبرهن أن للقطعتين [OB] و [EF] نفس المنتصف M.

يكفي أن نبرهن أن الرباعي EBFO متوازي أضلاع أي نبرهن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FO}$

لدينا حسب علاقة شال :



$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO}$$

$$= \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB})$$

$$\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(2\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

إذن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FO}$ و منه الرباعي EBFO متوازي الأضلاع و بالتالي [EF] و [OB] هما قطران له أي M نقطة تقاطعهما هي منتصف كلا القطرين .

حل التمرين 6:

1) نعلم أنه إذا كانت $(x;y)$ احداثيتا نقطة T في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

فإن $\overrightarrow{AT} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ نعلم أن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}$

و $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

- بما أن مبدأ المعلم هو النقطة A فإن احداثيتاA هما $(o;o)$
- بما أن $\overrightarrow{AB} = 1\times\overrightarrow{AB} + o\times\overrightarrow{AD}$ فإن احداثيتا B هما $(1;o)$
- بما أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

فإن إحداثيتا النقطة C هما $\left(\frac{1}{2};1\right)$

- بما أن $\overrightarrow{AD} = o\times\overrightarrow{AB} + 1\times\overrightarrow{AD}$ فإن احداثيتا النقطة D هما $(o;1)$
- بما أن $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ فإن إحداثيتا النقطة E هما $\left(\frac{1}{4};1\right)$
- بما أن $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + O\times\overrightarrow{AD}$ فإن احداثيتا F هما $\left(\frac{1}{2};0\right)$.
- بما أن (1)....

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}....(1)$$

فإن إحداثيتا النقطة M هما $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

- بما أن

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}...(2)$$

فإن احداثيتا النقطة N هما $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

2) بما أن K منتصف القطعة [MN] وباستخدام العلاقتين (1) و(2) .

فإن احداثيتا k هما $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)$ أي $\left(\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right)$

التمرين 7: يكون المستقيمان (AB) و(CD) متوازيـان إذا وفقـط إذا كـان $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$ متوازيين .

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,2)$ ، $\overrightarrow{CD}(3,2)$

بما أن الجدول لا يمثل وضعية تناسبية فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير متوازيين ومنه المستقيمان غير متوازيين .

-3	3
2	2

2) لدينا $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{6}-6;-\sqrt{6}-3\right)$ ، $\overrightarrow{CD}\left(1;-3\sqrt{6}\right)$

بما أن الجدول لا يمثـل وضـعية تناسـبية فـإن الشعاعين غير متوازيين ومنه المسـتقيمان (AB) و(CD) غير متوازيين .

$\sqrt{6}-6$	1
$-\sqrt{6}-3$	$-3\sqrt{6}$

حل التمرين 8:

لدينا $A(x;2)$ ، $B(-1;x)$ ، $C(x+1;-2)$

1) النقط C،B،A على استقامة واحدة معناه: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان.

$-1-x$	1
$x-2$	-4

$\overrightarrow{AB}(-1-x;x-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;-4)$ أي الجدول يمثل تناسبا

$-4(-1-x)=1\times(x-2)$ معناه: $4+4x=x-2$

ومنه $3x=-6$ إذن $x=-2$

2) يتساوى شعاعان إذا كانت المركبة الأولى تساوي المركبة الأولى والمركبة الثانية تساوي المركبة الثانية .

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ معناه: $-1-x=1$ و $x-2=-4$ أي $x=-2$ و $x=-2$

إذن $x=-2$

حل التمرين 9:

تشكل جداول تناسبية في الحالات الأربعة:

x	$5x$
y	$5y$
$5xy=5xy$	

(1)

x	x^2
y	y^2
$xy^2\neq yx^2$	

(2)

x	$3x-5$
y	$3y-5$
$x(3y-5)\neq(3x-5)$	

(3)

x	$\|x\|$
y	$\|y\|$
$x\|y\|\neq y\|x\|$	

(4)

من أجل كل عددين حقيقيين x و y فإن الجدول (1) يمثل وضعية تناسبية بينما الجداول (2)، (3)، (4) لا تمثل وضعيات تناسبية إذن في الحالة الأولى فقط يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

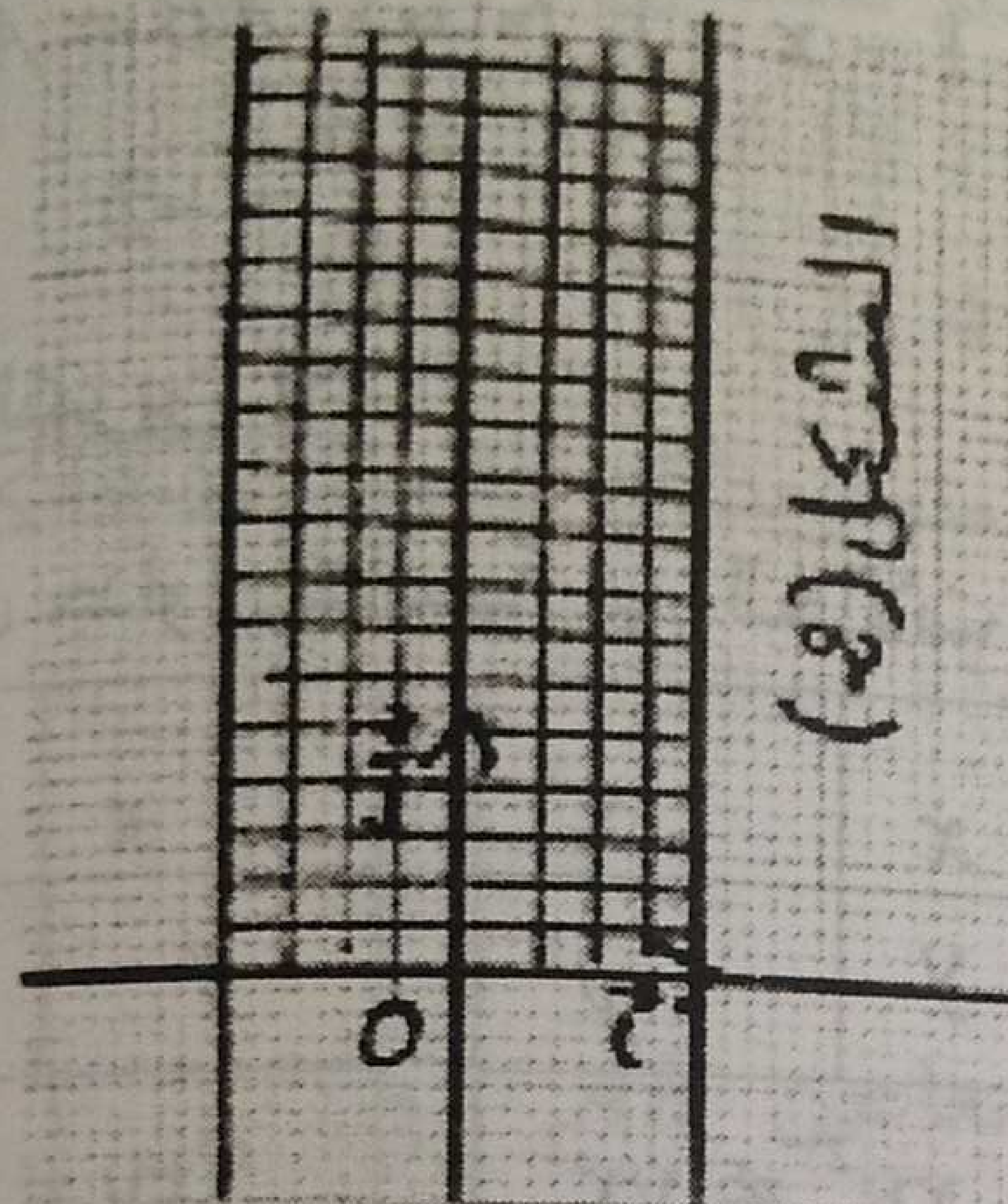
حل التمرين 10:

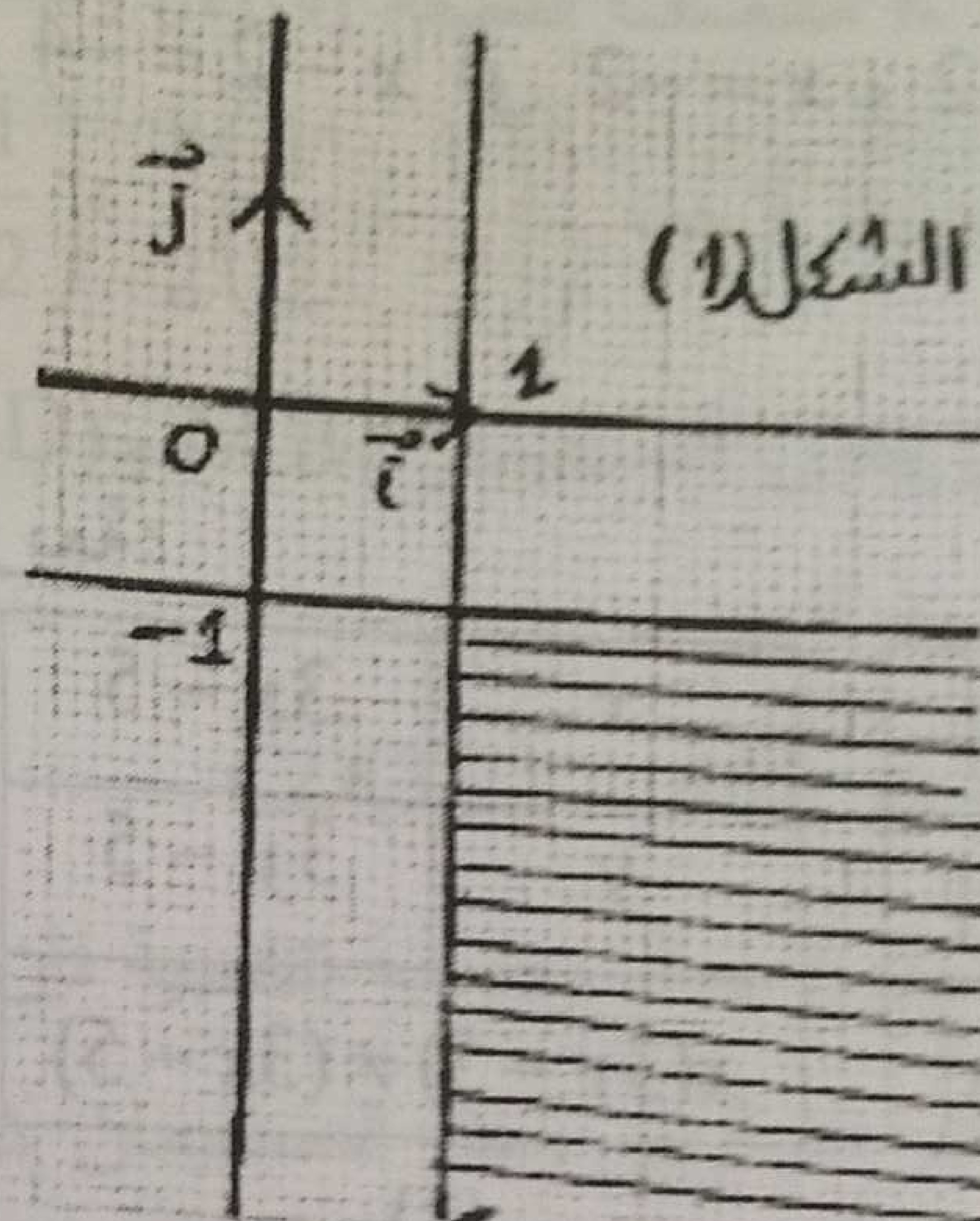
1) حل المتراجحة $x\geq 1$ بيانيا هو مجموعة نقط نصف مستوي مغلق محدد بالمستقيم $x=1$ وحل المتراجحة $y\leq -1$ بيانيا هو مجموعة نقط نصف مستو مغلق محدد بالمستقيم ذي المعادلة $y=-1$ إذن مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x\geq 1$ و $y\leq -1$ هي تقاطع نصفي المستويين المغلقين وهي عبارة عن الجزء المظلل المبين في الشكل (1).

2) حل المتراجحة $-1\leq x\leq 1$ بيانيا هي الشريط المحدد بالمستقيمين ذي المعادلتين $x=-1$ و $x=1$ وحل المتراجحة $y\geq 0$ بيانيا هو نصف مستوي مغلق محدد بالمستقيم ذي المعادلة : $y=0$.

إذن مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $-1\leq x\leq 1$ و $y\geq 0$ هي تقاطع

الشريط مع نصف المستوي المغلق وهو عبارة عن الجزء المظل المبين في الشكل (2) .





حل التمرين 11:

لدينا $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ، $\vec{v}=-8\vec{i}+12\vec{j}$ ، $\vec{w}=\frac{-1}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}$

1) $\vec{v}=-8\vec{i}+12\vec{j}=-4(2\vec{i}-3\vec{j})=-4\vec{u}$

أي $\vec{v}=-4\vec{u}$ $(k=-4)$ إذن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان.

2) $\vec{w}=\frac{-1}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}=\frac{-1}{4}\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)=-\frac{1}{4}\vec{u}$

أي $\vec{w}=-\frac{1}{4}\vec{u}$ $\left(k=\frac{-1}{4}\right)$ إذن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{w}$ متوازيان .

3) بما أن $\vec{u}$ يوازي $\vec{v}$ ، و $\vec{u}$ يوازي $\vec{w}$ فإن $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متوازيان ويكون $\vec{w}=\frac{1}{16}\vec{v}$.

معارف: المستوي منسوب إلى معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) معادلة مستقيم: المستوي معادلة من الشكل:

الخاصية 1: لكل مستقيم في المستوي معادلة من الشكل : لكل مستقيم في المستوي عددان حقيقيان إذا كان لا يوازي محور التراتيب

• $y = mx + p$ حيث m و p عددان حقيقيان إذا كان لا يوازي محور التراتيب.

• $x = k$، حيث k عدد حقيقي، إذا كان يوازي محور التراتيب.

الخاصية 2: ليكن (d)، (d') مستقيمان غير موازيين لمحور التراتيب، يكون المستقيمان (d) و(d') متوازيين إذا وفقط إذا كان معاملا توجيههما متساويين.

2) جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين حقيقيين :

تعريف 1: لتكن a، b، c ثلاثة أعداد حقيقية، b,a غير معدومين معا، نسمي معادلة خطية ذات مجهولين x و y كل معادلة من الشكل: $ax + by = c$.

حل هذه المعادلة يعني إيجاد كل الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الحقيقية التي تحقق : $a\alpha + b\beta = c$

تطبيق 1: الثنائية (3;2) هي حل للمعادلة : $5x - 4y = 7$

لأن $5\times 3 - 4\times 2 = 7$ (توجد ثنائيات أخرى) .

الخاصية 3: كل معادلة خطية ذات مجهولين حقيقيين : $ax + by = c$ حيث $(a;b) \neq (o;o)$ تقبل عدد غير منته من الحلول .

تعريف 2: نعتبر في R^2 الجملة (S): $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

حل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين يعني إيجاد كل الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الحقيقة التي تحقق المعادلتين معا .

الخاصية 4: نعتبر في R^2 الجملة (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

• الجملة (S) تقبل حلا وحيدا إذا وفقط إذا كان $ab' - ba' \neq 0$

* إذا كان $ab'-ba'=0$ فإن الجملة (S) إما لا تقبل حلولا وإما تقبل عدد غير منته من الحلول .

✓ **معادلة مستقيم يشمل نقطتين متمايزتين :**

الحالة الأولى :

* إذا كانت النقطتان لهما نفس الفاصلة k فإن معادلة المستقيم هي $x=k$
* إذا كانت النقطتان لهما نفس الترتيب p فإن معادلة المستقيم هي $y=p$

الحالة الثانية :

إذا كانت النقطتان $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فاصلتاهما وترتيباهما مختلفان فإن معادلة المستقيم (AB) من الشكل $y=mx+p$

نحسب معامل توجيه المستقيم m حيث $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

نحسب ترتيب فاصلة المبدأ العدد p باستعمال المعادلة : $y_A=mx_A+p$

✓ **معادلة مستقيم يشمل نقطة ويوازي شعاعا معلوما :**

الحالة الأولى : ليكن (d) و(d') مستقيمان لهما نفس المنحنى .

* إذا كان (d') يوازي محور التراتيب فإن (d) يوازي أيضا محور التراتيب .
* إذا كان (d') لا يوازي محور التراتيب فإن معاملي توجيه (d) و(d') متساويان .

الحالة الثانية : ليكن (d) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}$ إحداثياه $(\alpha;\beta)$

* إذا كان $\alpha=0$ فإن المستقيم (d) يوازي محور التراتيب .
* إذا كان $\alpha\neq 0$ فإن معامل توجيه المستقيم (d) يساوي $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

✓ **حل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y :**

* إذا كانت الجملة تقبل حلا وحيدا نبحث عن هذا الحل باستعمال طريقة الجمع أو التعويض.

• إذا كانت الجملة لا تقبل حلا وحيدا :

1/ الجملة لا تقبل حلا (معادلتا الجملة هما معادلتا مستقيمان متوازيان تماما) .

2/ الجملة تقبل عدد غير من الحلول (معادلتا الجملة هما معادلتا مستقيمان منطبقان ومتوازيان) .

الحل البياني للمتراجحة $ax+by+c\geq0...(*)$: (a و b غير معدومين معا)

إن الحل البياني للمتراجحة (*) هو مجموعة نقط نصف مستوي مغلق (أو مفتوح) محدد بالمستقيم ذي المعادلة $ax+by+c=0$ ولتعيين هذه المجموعة نأخذ نقطة كيفية $M_0(x_0,y_0)$ من المستوي ونعوض إحداثيتها في المتراجحة (*).

إذا كانت الجملة صحيحة فإن نصف المستوي الذي يشمل النقطة M_0 هو الذي يحقق.

إذا كانت الجملة خاطئة فإن نصف المستوي الذي لا يشمل النقطة M_0 هو الذي يحقق (عادة نختار للسهولة المبدأ O) .

اختبر معلوماتك :

بين صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان)

1) كل دالة تآلفية تمثل معادلة مستقيم في المستوي .

2) كل مستقيم في المستوي معادلة من الشكل $y=mx+p$

3) كل مستقيم في المستوي يمثل بيان دالة تآلفية .

4) $x=-3$ ، $x=\sqrt{3}$ معادلتان لمستقيمين موازيين لمحور التراتيب .

5) إذا كانت $A(2;5)$ ، $B(-3;5)$ فإن معادلة المستقيم (AB) هي $x=5$.

6) المستقيم الذي معامل توجيهه 4 وترتيب مبدئه 5 معادلته : $y=5x+4$.

7) إذا كان مستقيم يوازي محور الفواصل فإن ليس له معامل توجيه .

8) الجملة $y=2x-5$ و $y=2x+1$ لا تقبل حلولا .

9) المستقيمان ذو المعادلتين : $x=-3$ و $y=4$ يتقاطعان في النقطة $M(-3;4)$.

10) $y=ax$ هي معادلة لمستقيم يشمل المبدأ O.

التمارين

التمرين 1:

بيّن أن كل معادلة من المعادلات التالية تكتب على الشكل: $y=mx+p$.

ثم استنتج معامل توجيه وترتيب فاصلة المبدأ، ثم مثّل بيانيا كل مستقيم في معلم متعامد ومتجانس.

1) $3x+5y=10$ ، 2) $y=\frac{x-3}{4}$ ، 3) $x+\frac{1}{2}y+1=0$

التمرين 2:

عين في كل حالة معادلة مستقيم (d) يشمل النقطة A ويوازي المستقيم (Δ).

1) $A(-1;4)$ ، $(\Delta): y=5x+3$ ، 2) $A(2;3)$ ، $(\Delta): y=-\frac{2}{3}x+1$

التمرين 3:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $A(3;1)$، $B(3;-2)$، $C(-1;-2)$. عين معادلة لكل من المستقيمات (AB)، (BC)، (AC).

التمرين 4: بيّن في كل حالة أن الجملة تقبل حلا وحيدا . ثم حل هذه الجملة :

1) $\begin{cases} 3x-y=7......(1) \\ 5x+3y=35......(2) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-4y=17....(1) \\ 5x+3y=9.......(2) \end{cases}$

التمرين 5: ليكن (H) التمثيل البياني للدالة f حيث:

$f(x)=ax^2+bx+c$ و a، b، c أعداد حقيقية .

1) عين العدد الحقيقي c بحيث تكون النقطة $A(O;2)$ تنتمي إلى المنحنى (H)

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون النقطتان $B(2;-4)$ ، $E(5;3)$ تنتميان إلى المنحنى (H).

التمرين 6:

x و y عددان حقيقيان موجبان تماما نعتبر الجملة (S):

$$\begin{cases} 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=26 \\ -2\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$$

1) نضع $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$ عبّر عن الجملة الجديدة (S_1) بدلالة المتغيرين الجديدين X و Y الناتجة من الجملة (S). ثم حل الجملة (S_1).

2) عبّر عن x و y بدلالة X و Y ثم استنتج الثنائية $(x;y)$ حل الجملة (S)

التمرين 7:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$\begin{cases} y\leq 2x+1 \\ y\geq -x+2 \end{cases}$$

حل بيانيا الجملة .

التمرين 8: المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(5;-7)$ ، $B(2;4)$ ، $C(-3;2)$

جد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل C ويوازي المستقيم (AB).

التمرين 9: بيّن في كل حالة أن الجملة إما لا تقبل حلولا وإما تقبل عدد غير منته من الحلول .

1) $\begin{cases} 5x-4y=7 \\ 10x-8y=6 \end{cases}$ (2 $\begin{cases} x-3y=4 \\ -3x+9y=-12 \end{cases}$

التمرين 10:

المستوي منسوب إلى معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ عين في كل حالة معادلة المستقيم :

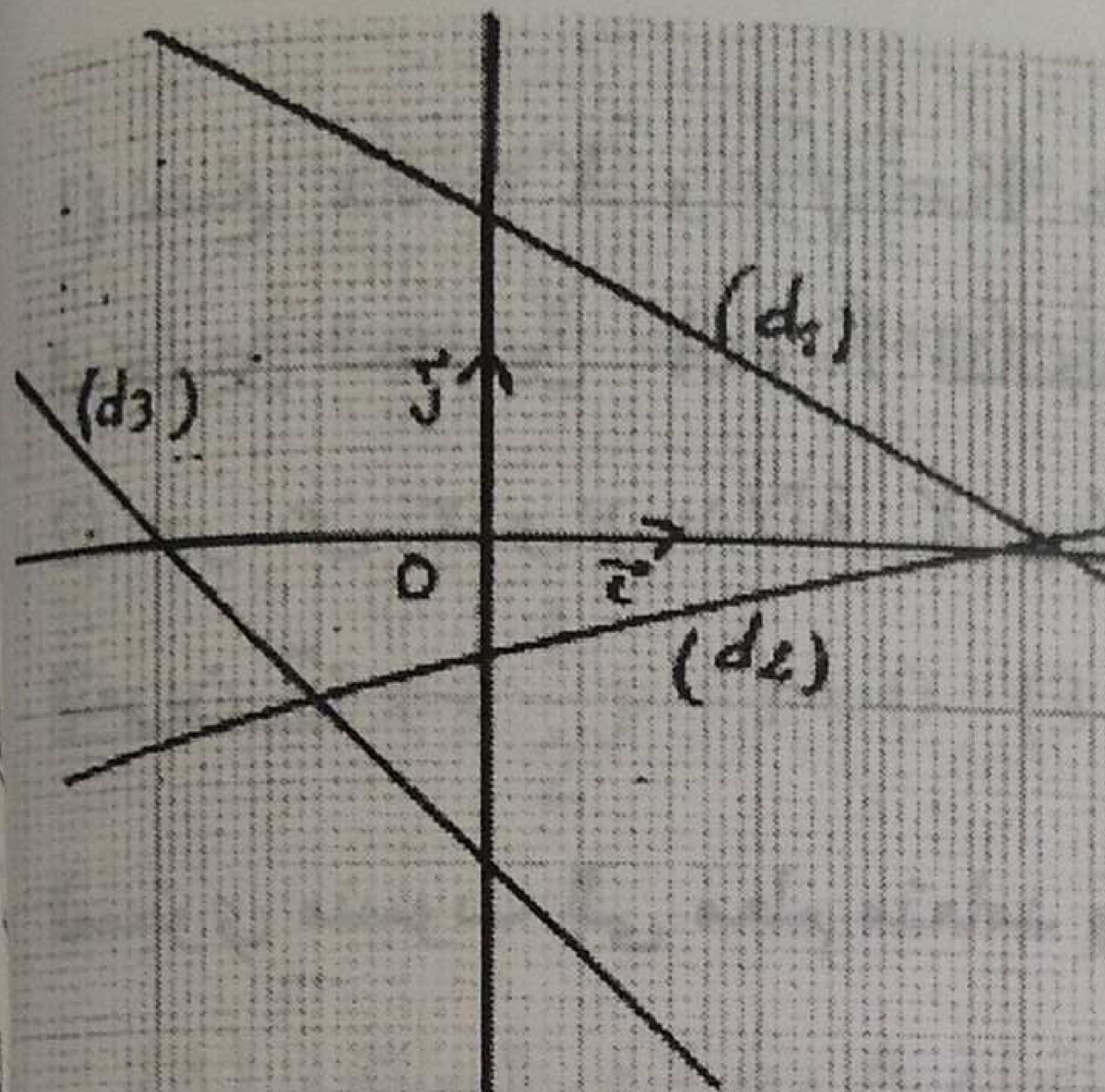
(GH) حيث $G(3;\sqrt{2})$ و $H(3;\sqrt{3})$

(AB) حيث $A\left(1;\frac{2}{3}\right)$ و $B\left(\frac{5}{3};\frac{1}{5}\right)$.

حل التمرين 1:

1) $3x+5y=10$ معناه: $y=\frac{-3}{5}x+2$ معامل توجيه هذا المستقيم هو $-\frac{3}{5}$

وترتيب فاصلة المبدأ هو 2 ، أي إذا كان $x=0$ فإن $y=2$.



2) $y=\frac{x-3}{4}$ معناه: $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

معامل توجيه المستقيم (d_2) هو $\frac{1}{4}$

وترتيب فاصلة المبدأ هو $-\frac{3}{4}$.

3) $x+\frac{1}{2}y+1=0$ معناه:

$y=-2x-2$ معامل توجيه المستقيم

(d_3) هو -2 وترتيب فاصلة المبدأ هو -2

حل التمرين 2:

1) ليكن $y=mx+p$ بما أن (Δ) و(d) متوازيان فإن معاملي توجيههما متساويان أي $m=5$ إذن $y=5x+p$. A تنتمي إلى (d) معناه: $y_A=5x_A+p$ أي $4=-5+p$ ومنه $p=9$ إذن معادلة (d) هي : $y=5x+9$.

2) ليكن $y=mx+p$ بما أن (Δ) و(d) متوازيان فإن معاملي توجيههما متساويان أي $m=\frac{-2}{3}$ إذن $y=\frac{-2}{3}x+p$ A تنتمي إلى (d) معناه: $y_A=\frac{-2}{3}x_A+p$ أي $3=\frac{-4}{3}+p$ ومنه $p=\frac{13}{3}$. إذن معادلة (d) هي $y=\frac{-2}{3}x+\frac{13}{3}$.

حل التمرين 3:

• بما أن A و B لهما نفس الفاصلة 3 فإن معادلة المستقيم (AB) هي $x=3$.

• بما أن B و C لهما نفس الترتيب 2− فإن معادلة المستقيم (BC) هي $y=-2$

• بما أن A و C لهما فاصلتان وترتيبان مختلفان فإن للمستقيم (AC) معادلة من الشكل : $y=mx+p$ حيث $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-1}{-1-3}=\frac{3}{4}$

إذن $y=\frac{3}{4}x+p$. A تنتمي إلى المستقيم (AC) معناه: $y_A=\frac{3}{4}x_A+p$

أي $1=\frac{+9}{4}+p$ ومنه $p=\frac{-5}{4}$ إذن معادلة (AC) هي : $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$.

حل التمرين 4:

1) بما أن $ab'-a'b=3(3)+1(5)=9+5=14$

فإن الجملة (1) تقبل حلا وحيدا هي الثنائية $(x;y)$.

من المعادلة (1) نجد: $y=3x-7$، نعوض قيمة y في المعادلة (2) نجد:

$5x+3y=35$ معناه: $5x+3(3x-7)=35$ أي $14x=56$ إذن $x=4$.

ومنه $y=3(4)-7=5$. حل الجملة الأولى هو $(4;5)$.

2) بما أن $ab'-a'b=3(3)-(-4)(5)=29$

فإن الجملة تقبل حلا وحيدا هي الثنائية $(x;y)$. نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 3، ونضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 4 نجد :

$$\begin{cases}9x-12y=51...(3)\\20x+12y=36...(4)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3) و(4) نجد:

$29x=87$ أي $x=3$ ومنه $9-4y=17$ أي $-4y=8$

إذن $y=-2$. ومنه حل الجملة الثانية هو $(3;-2)$.

حل التمرين 5:

1) لدينا $f(x)=ax^2+bx+c$.

$A\in(H)$ معناه: $f(0)=2$ أي $a(0)^2+b(0)+c=2$ إذن $c=2$.

ومنه $f(x)=ax^2+bx+2$.

2) $\begin{cases} B\in(H) \\ E\in(H) \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} f(2)=-4 \\ f(5)=3 \end{cases}$ أي $\begin{matrix} 4a+2b+2=-4 \\ 25a+5b+2=3 \end{matrix}$

إذن $\begin{cases} 2a+b=-3 ...(1) \\ 25a+5b=1 ....(2) \end{cases}$ بما أن $2(5)-1(25)=-15$

فإن الجملة تقبل حلا وحيدا من المعادلة (1) نجد: $b=-2a-3$

$25a+5b=1$ معناه: $25a+5(-2a-3)=1$ أي $15a=16$ إذن $a=\dfrac{16}{15}$

بالتعويض نجد: $b=-2\left(\dfrac{16}{15}\right)-3=\dfrac{-77}{15}$ ومنه $f(x)=\dfrac{16}{15}x^2-\dfrac{77}{15}x+2$

حل التمرين 6:

1) بتعويض قيمتي $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$ تصبح الجملة (S_1)

$$\begin{cases} 3X+4Y=26 \\ -2X+Y=1 \end{cases}$$

بما أن $ab'-a'b=3(1)-(4)(-2)=11$

فإن الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا .

نضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد (4-) نجد:

$3X+4Y=26$ و $8X-4Y=-4$ نجمع هاتين المعادلتين نجد :

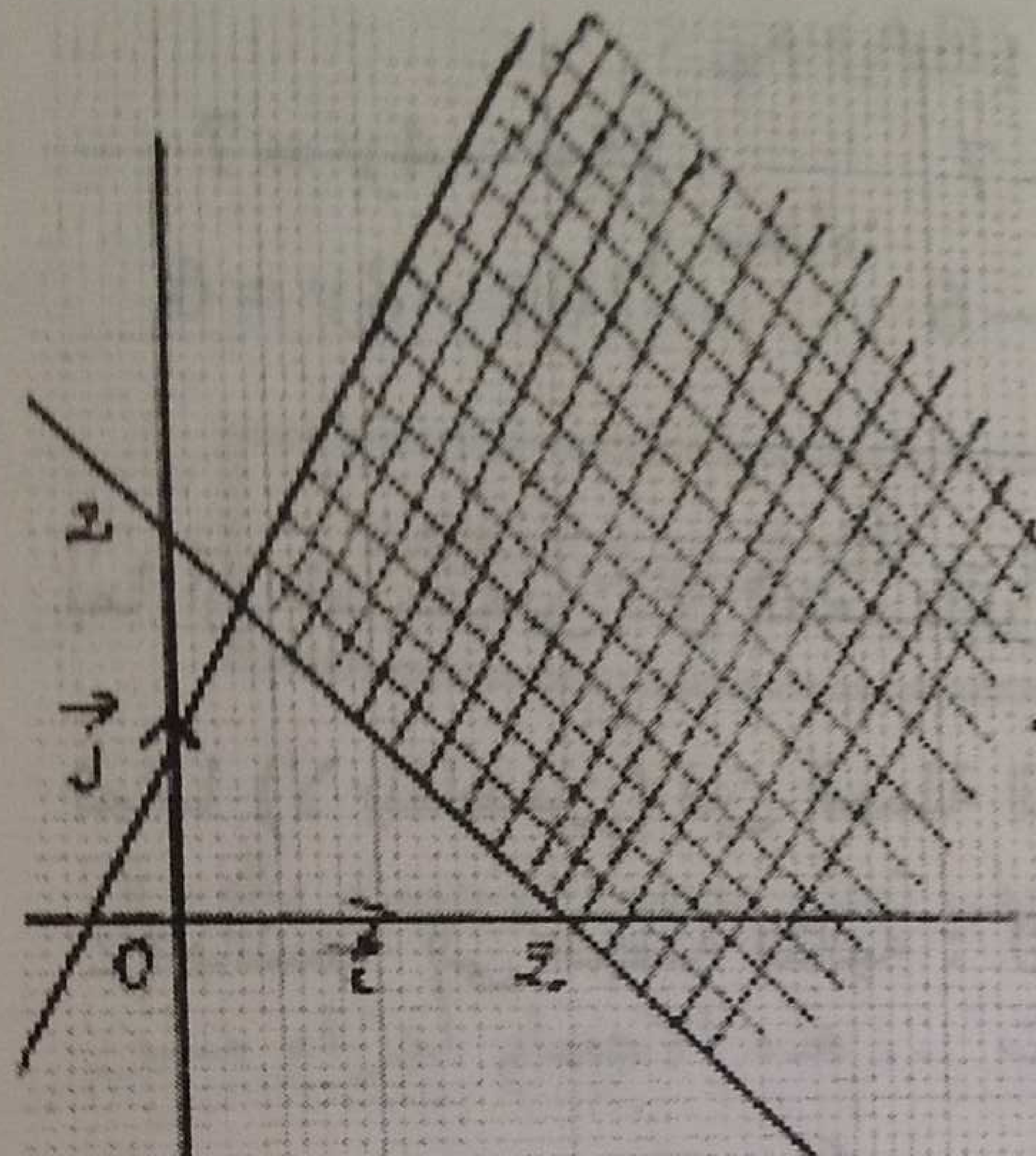
$11X=22$ معناه: $X=2$ بتعويض قيمة X في المعادلة الثانية .

$(-2)2+Y=1$ معناه: $Y=5$ إذن حلول الجملة (S_1) هو $(2;5)$

2) $X=\sqrt{x}$ معناه: $X^2=x$ ، $Y=\sqrt{y}$ معناه: $Y^2=y$.

إذا كان $X=2$ فإن $x=X^2=2^2=4$. وإذا كان $Y=5$ فإن

وعليه يكون حل الجملة (S) هو الثنائية (4;25). $y = Y^2 = 5^2 = 25$



حل التمرين 7:

• الحل البياني للمتراجحة $y \leq 2x + 1$ هو مجموعة نقط نصف مستوي مغلق محدد بالمستقيم ذي المعادلة $y = 2x + 1$ والذي يشمل المبدأ O (لأنه من أجل النقطة $O(0;0)$ الجملة $0 \leq 1$ صحيحة).

• الحل البياني للمتراجحة $y \geq -x + 2$ هو مجموعة نقط نصف مستوي مغلق محدد بالمستقيم ذي المعادلة $y = -x + 2$، الذي لا يشمل المبدأ O (لأنه من أجل النقطة $O(0;0)$ الجملة $0 \geq 2$ خاطئة).

• الحل البياني للجملة المقترحة هو مجموعة نقط تقاطع نصفي المستويين المغلقين وهو يمثل الجزء المظلّل المبيّن في الشكل.

حل التمرين 8:

لدينا $A(5;-7)$ ، $B(2;4)$ ، $C(-3;2)$

بما أن A و B لهما فاصلتان وترتيبان مختلفان فإن للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل: $y = mx + p$ حيث $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4+7}{2-5} = \frac{-11}{3}$

إذن $y = -\frac{11}{3}x + p$ (لأن (Δ) و (AB) لهما نفس معامل التوجيه).

(Δ) يشمل النقطة C معناه: $y_c = \frac{-11}{3}x_c + p$ أي $2 = 11 + p$

إذن $p = -9$

ومنه معادلة المستقيم (Δ) هي $y = \frac{-11}{3}x + 2$

حل التمرين 9:

1) بالنسبة للجملة الأولى فإن $(5)(-8)-(-4)(10)=0$

$$\begin{cases}5x-4y=7\\10x-8y=6\end{cases}$$ معناه: $$\begin{cases}4y=5x-7\\8y=10x-6\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}\\y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}\end{cases}$$

بما أن المستقيمين ذي المعـــدلتين $y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$ و $y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}$ متوازيـــان تماما (لا يتقاطعان) فإن الجملة المقترحة لا تقبل حلا .

2) بالنسبة إلى الجملة الثانية : $1(9)-(-3)(-3)=0$

$$\begin{cases}x-3y=4\\-3x+9y=-12\end{cases}$$ معناه: $$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\\y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\end{cases}$$ أي $$y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$$

بما أن المعادلتين متكافئتان فإن المستقيمين متطابقان، هذا معناه أن الجملة المقترحة تقبل عدد غير منته من الحلول هي الثنائيات $\left(x;\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)$. x عدد حقيقي .

حل التمرين 10:

1) بما أن النقطتين G و H لهما نفس الفاصلة 3 فإن معادلة المستقيم (GH) هي $x=3$.

2) بما أن A و B لهما فاصلتان وترتيبان مختلفان فإن للمستقيم (AB) معادلة من الشكل : $y=mx+p$ حيث $$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}-1}=\frac{-7}{10}$$

$A \in (AB). y = \frac{-7}{10}x + p$ معناه: $y_A = \frac{-7}{10}x_A + p$ إذن

أي $\frac{2}{3} = \frac{-7}{10} + p$ إذن $p = \frac{41}{30}$ ومنه معادلة (AB) هي :

$y = \frac{-7}{10}x + \frac{41}{30}$

13 المستقيم والمستوي في الفضاء – التوازي والتعامد

الفضاء :

رأينا في السنوات السابقة (التعليم المتوسط) كيف تمثل بعض الأجسام بالورق الشفاف : المكعب، الهرم، متوازي المستطيلات ... هذه الأجسام أجزاء من الفضاء، وكل نقطة من هذه الأجسام هي نقطة هي نقطة من الفضاء .

الفضاء هو مجموعة غير منتهية من النقط .

الأوضاع النسبية لمستقيمين :

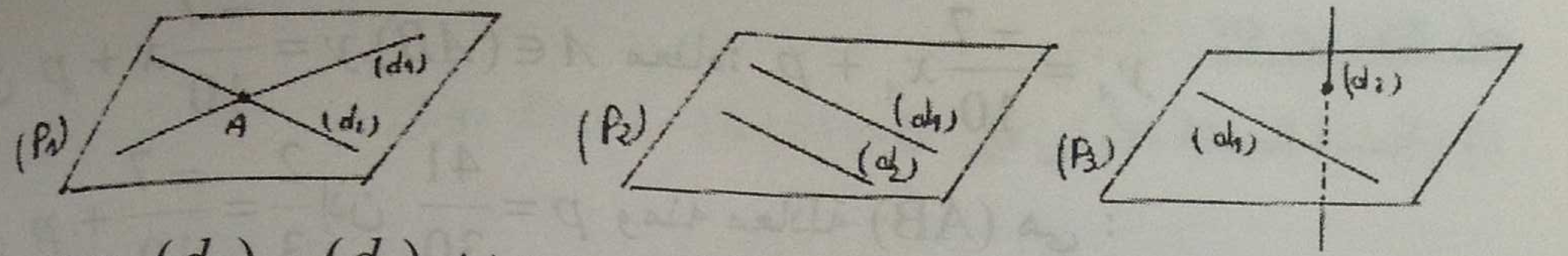
إذا كان (d_1) و (d_2) مستقيمان في الفضاء فإنهما إما متطابقان وإما متقاطعان وإما متوازيان تماما وإما ليسا في مستوي واحد.

توازي مستقيمين :

تعريف 1: يتوازى مستقيمان (d_1) و (d_2) في الفضاء إذا وفقط إذا كان متطابقين أو كانا في مستوي واحد ومنفصلين .

ملاحظات :

- إذا توازى مستقيمان وكانا منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما.
- في الهندسة المستوية إذا كان مستقيمان منفصلين فإنهما متوازيان، بينما في الهندسة الفضائية هذا غير صحيح إذا يمكن أن يكون مستقيمان منفصلين دون أن يكونا متوازيين .
- مستقيمان متوازيان تماما يعينان مستويا.

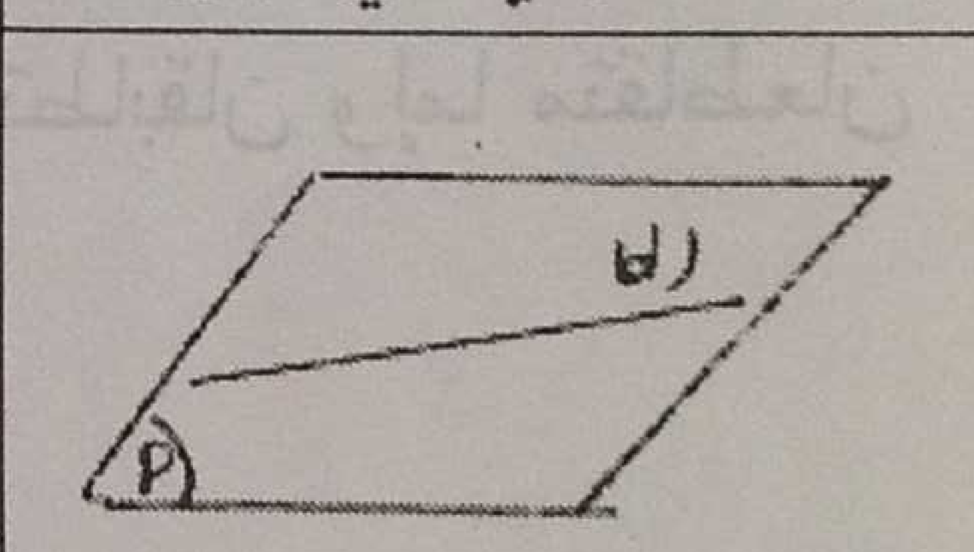
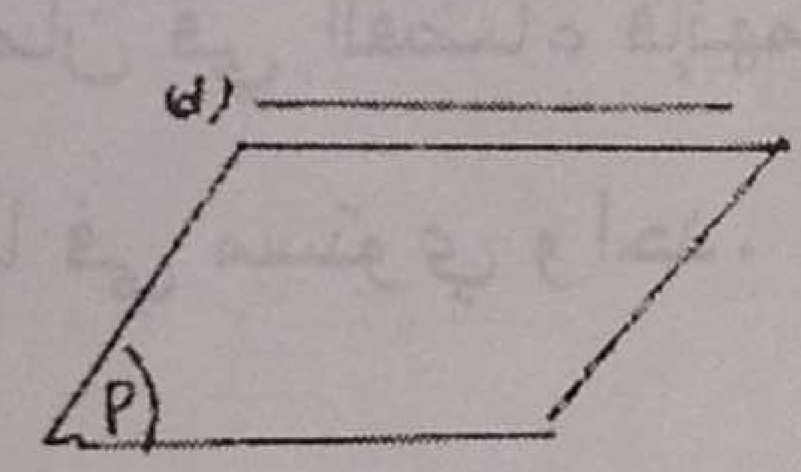
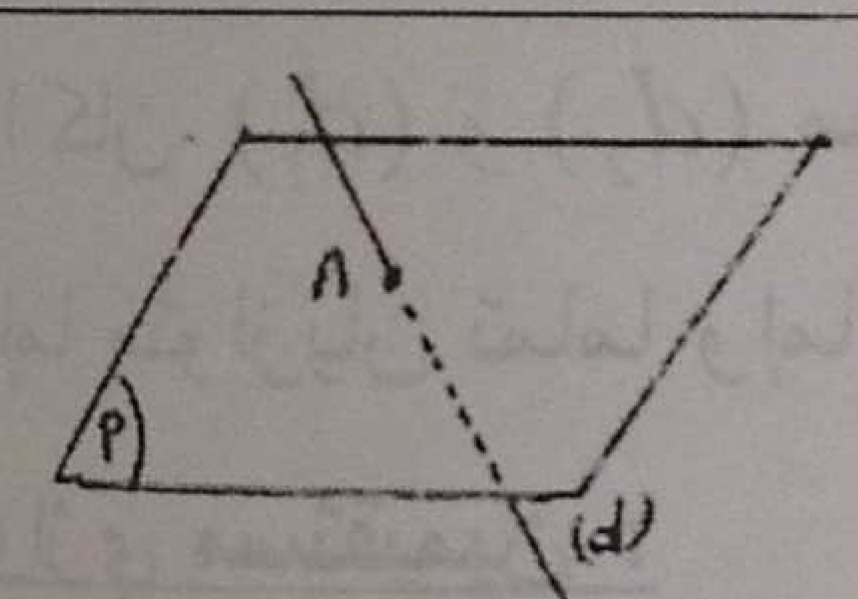


(d_1) و (d_2) متقاطعان — (d_1) و (d_2) متوازيان تماما — (d_1) و (d_2) ليسا في مستو واحد

<u>الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو:</u>

<u>تعريف3:</u> ليكن (d) مستقيم و (p) مستو.

- إذا كان للمستقيم (d) و المستوي (p) نقطتان مشتركتان نقول إن (d) محتوى في (p) .
- إذا كان للمستقيم (d) و المستوي (p) نقطة مشتركة واحدة نقول إن (d) يقطع المستوي (p).
- إذا كان للمستقيم (d) و المستوي (p) ليست أية نقطة مشتركة نقول إن (d) و(p) متوازيان تماما .

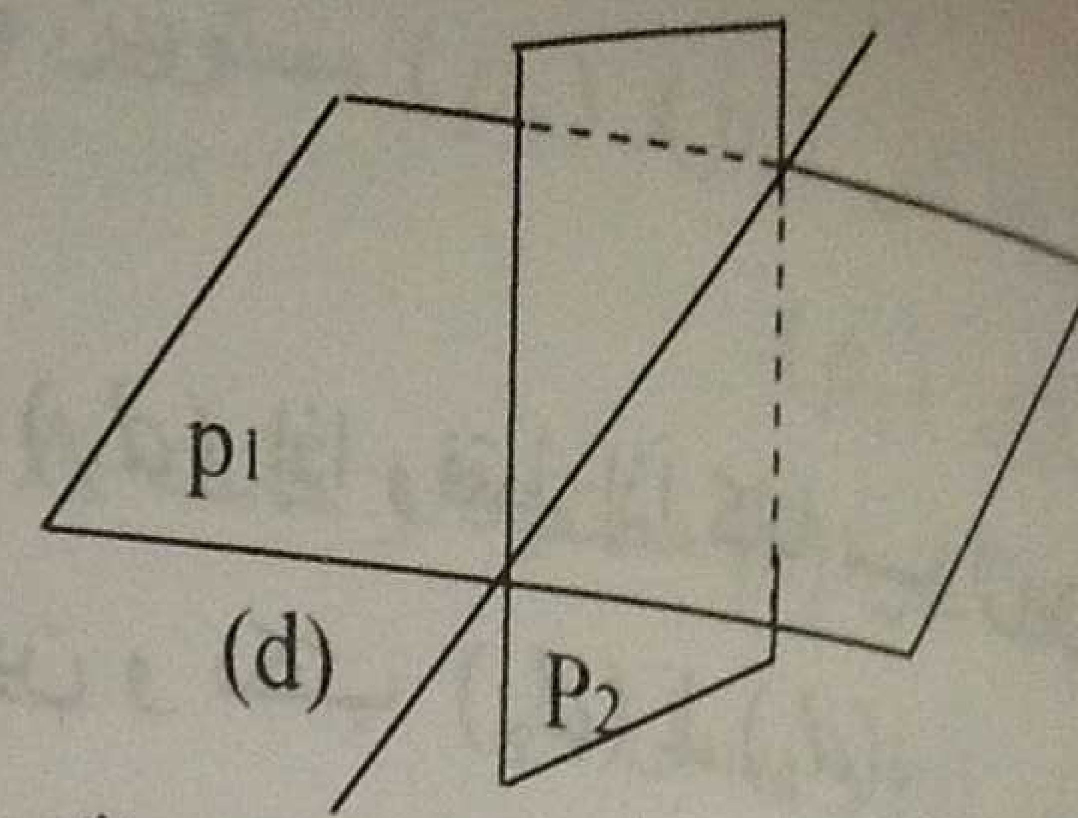
(d) محتوي في (p)	(d) يوازي تماما (p)	(d) يقطع (p)
		

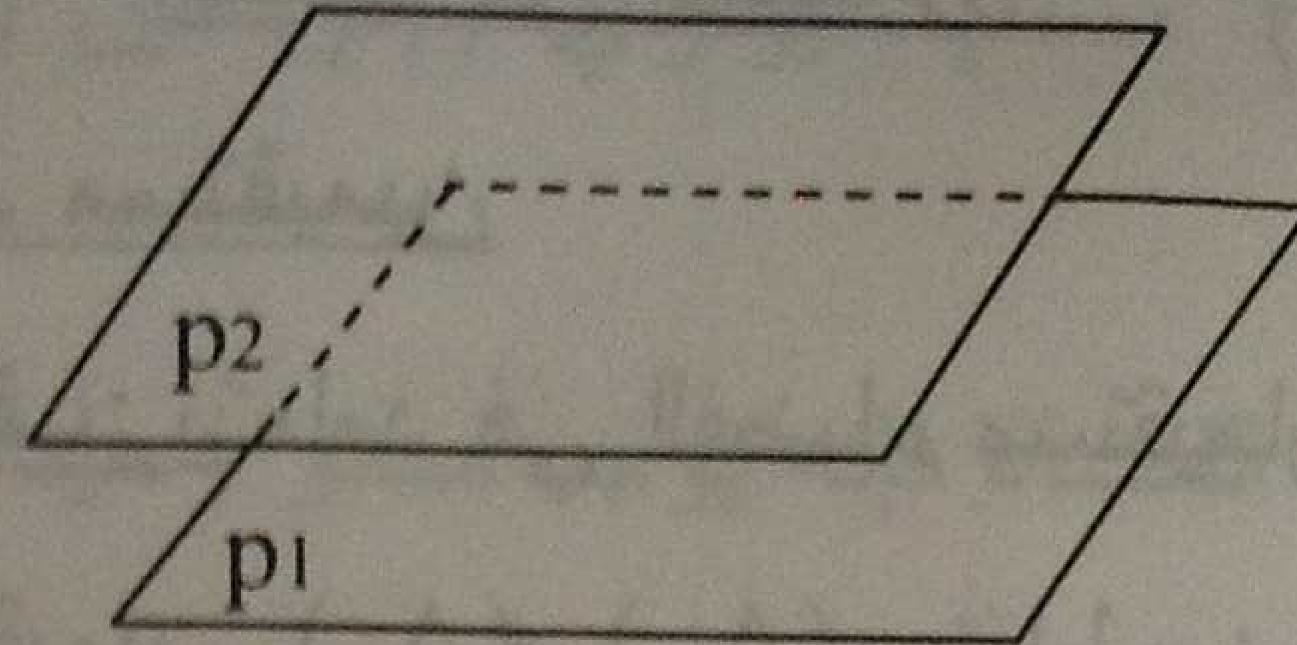
<u>توازي مستقيم و مستو:</u>

<u>الخاصية1:</u> يكون مستقيم (d) موازيا لمستو (p) إذا وفقط إذا كان المستقيم (d) موازيا لمستقيم من المستوي (p). أي (d)و(p) منفصلين أو(d) محتويا في (p)

<u>الأوضاع النسبية لمستويين:</u>

<u>تعريف:</u> إذا كلن (p_1)و (p_2) مستويين فإنهما إما متطابقان وإمـا متقاطعـان ومجموعة نقط تقاطعهما هو مستقيم (d) و إما متوازيان تماما.





(p_1) و (p_2) متقاطعان في مستقيم (d)

(p_1) و (p_2) متوازيان تماما

✓ **توازي مستويين:**

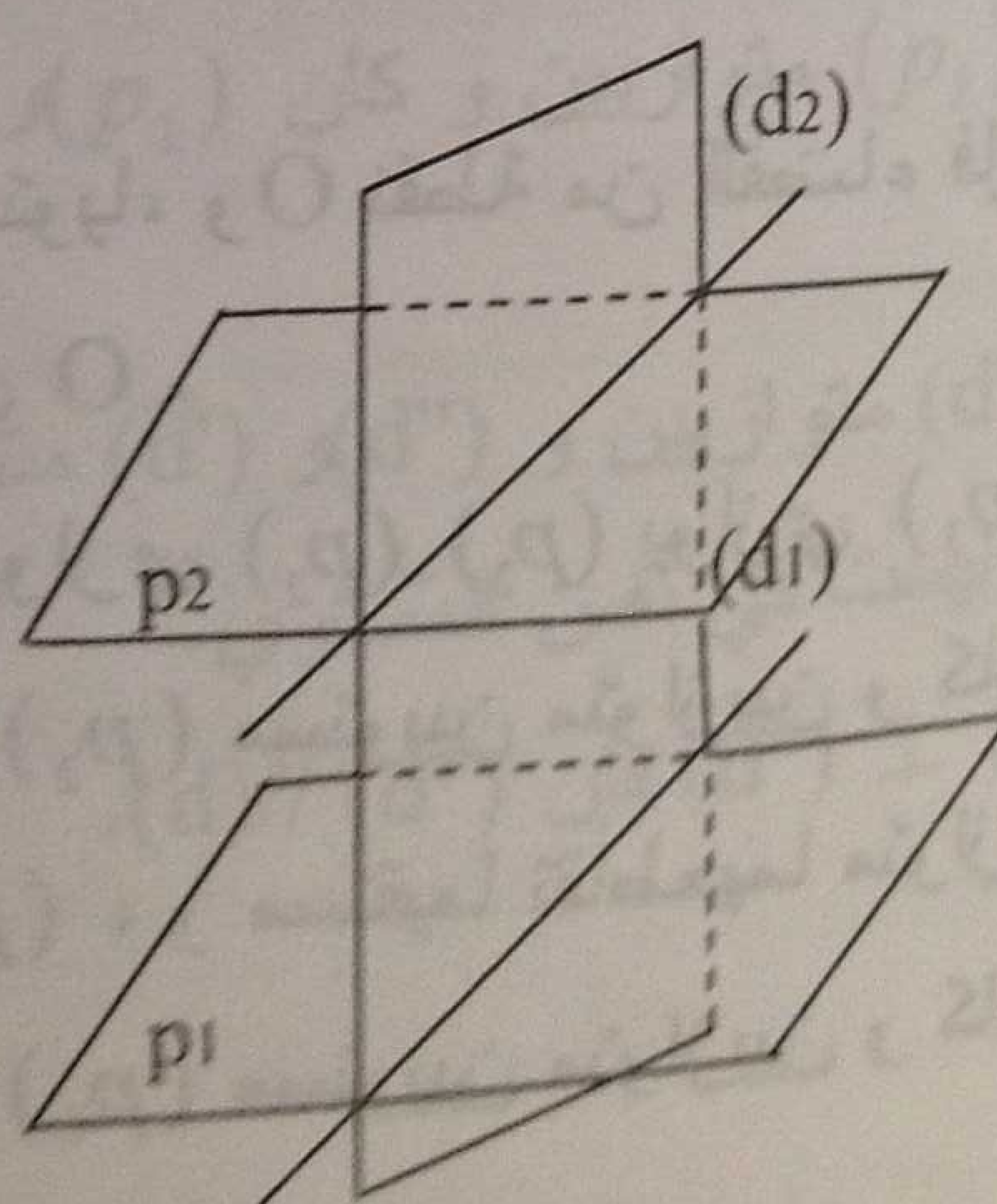
<u>تعريف:</u> يكون مستويان (p_1) و (p_2) متوازيين إذا و فقط إذا كان (p_1) و (p_2) متطابقين أو منفصلين.

<u>الخاصية:</u> إذا كان المستوي (p) يحتوي على مستقيمين (d_1) و (d_2) متقاطعين موازيين للمستوي (p_1) فإن المستويين (p) و (p_1) متوازيان.

<u>قاعدة:</u> إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما

- إذا كان (d_1) و (d_2) مستقيمين متوازيين و (d_1) محتوي في المستوي (p_1) و (d_2) مستقيم محتوي في المستوي (p_2) و (p_1) و (p_2) يتقاطعان في مستقيم (Δ) فإن المستقيم (Δ) يوازي كل من المستقيمين (d_1) و (d_2).

<u>الخاصية:</u> إذا كان مستو (p) يقطع مستويين متوازيين (p_1) و (p_2) فإن مستقيما تقاطعهما متوازيان.



✓ التعامد في الفضاء:

تعامد مستقيمين

تعريف: يتعامد في الفضاء مستقيمان (d_1) و (d_2) إذا وفقط إذا كانا موازيين لمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين و متعامدين و نكتب $(d_1) \perp (d_2)$.

ملاحظة: يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا و فقط إذا كان أحدهما عموديا على مستو يحتوي المستقيم الأخر .

تعامد مستقيم و مستو:

تعريف: يكون مستقيم (d) عموديا على مستو (p) إذا و فقط إذا كان (d) عموديا على مستقيمين متقاطعين من (p).

الخاصية: إذا كان مستقيم (d) عموديا على مستو (p) فإن (d) يقطع (p) و(d) عمودي على كل المستقيمات من (p).

خواص:

1) إذا كان (d) مستقيم وA نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل A و يوازي (d).

2) إذا كان (d_1) يوازي (d_2) و (d_2) يوازي (d_3) فإن (d_1) يوازي (d_3).

3) إذا كان (p) مستويا، وO نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستو وحيد (p_1) يوازي (p) و يشمل O .

4) إذا كان (p_1) يوازي (p_2) و (p_2) يوازي (p_3) فإن (p_1) يوازي (p_3)

5) إذا كان (p_1) و (p_2) مستويين متوازيين و كان (p) مستويا يقطع (p_1) فإن (p) يقطع (p_2) ، و مستقيما تقاطعهما متوازيان.

6) إذا كان (p_1) و (p_2) مستويين متوازيين و كان (d)مستقيم يقطع (p_1) فإن (d) يقطع (p_2).

7) إذا كان (p_1) و (p_2) مستويين و كان (d) مستقيما يوازي (p_1) فإن (d) يوازي (p_2).

8) إذا كان (d) مستقيما و كانت A نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستو وحيد يعامد (d) و يشمل A.

9) إذا كان (p) مستويا و كانت A نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يعامد (p) و يشمل A.

10) إذا توازى مستقيمان فإن كل مستو يعامد أحدهما يعامد الأخر .

11) إذا عامد مستويان نفس المستقيم (d) فإن هذين المستويين متوازيان.

12) إذا عامد مستقيمان نفس المستوي فإن هذين المستقيمين متوازيان.

اختبر معلوماتك:

بيّن صحة أو خطأ كلا من الجمل التالية (مع البرهان).

1) إذا كان (d) و (d') مستقيمان متوازيان فهما يقعان في نفس المستوي.

2) إذا كان (d')//(d'') و (d)//(d') فإن (d)//(d'').

3) المستويان المتطابقان هما مستويان متوازيان.

4) إذا كان (d) و (d') مستقيمان منفصلان في الفضاء فهما متوازيان.

5) إذا كان المستويان (p_1) و (p_2) متوازيين و كان (p_2) و (p_3) متوازيان فإن (p_1) و (p_3) متوازيان .

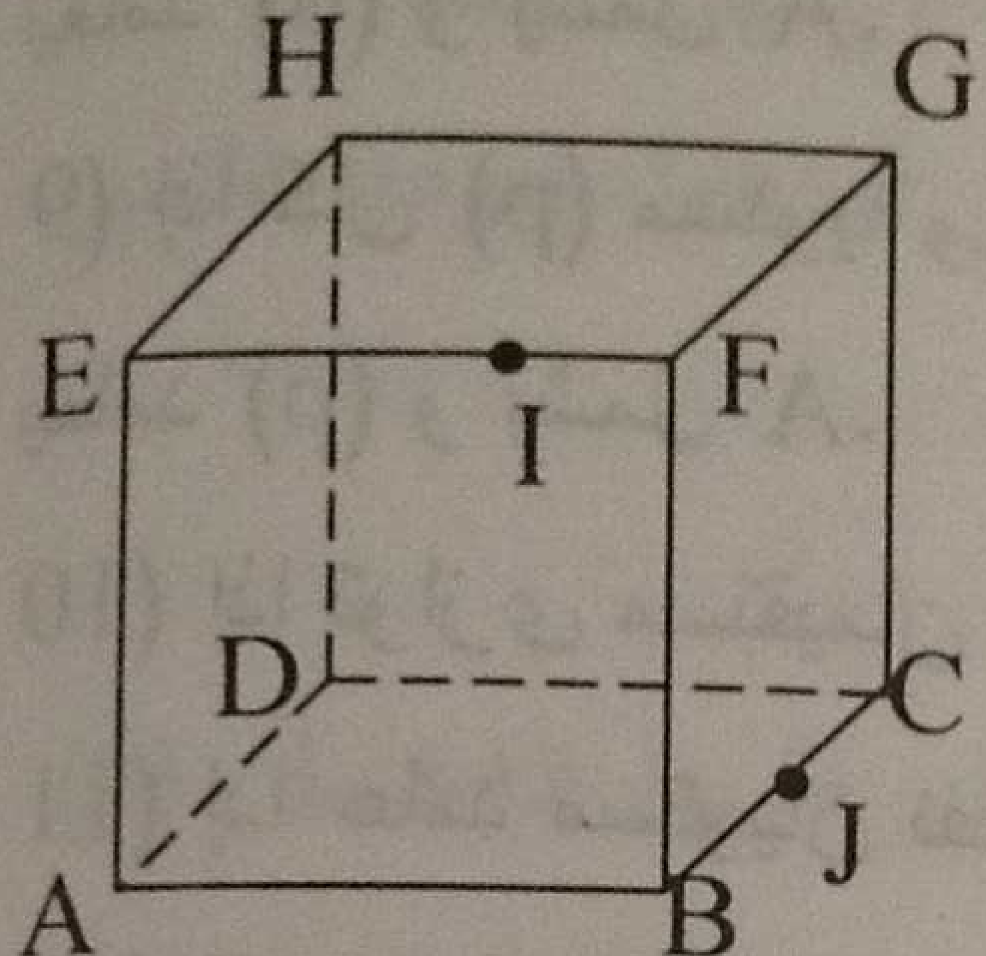
6) إذا كان المستقيمان (d) و (d') متوازيين و (d'') و (d') متوازيين فإن المستقيمات (d'') و (d') و (d) ليست في نفس المستوي.

7) إذا كان $(d)\perp(d')$ و $(d')\perp(d'')$ فإن (d'') // (d).

التمارين

التمرين1:

ABCDEFGH مكعب، حيث J و I نقطتان من الحرفين [EF] و[BC] على الترتيب.



أوجد الوضعية النسبية للمستقيمات أو للمستويات.

1) المستقيمان (BC) و (AI).

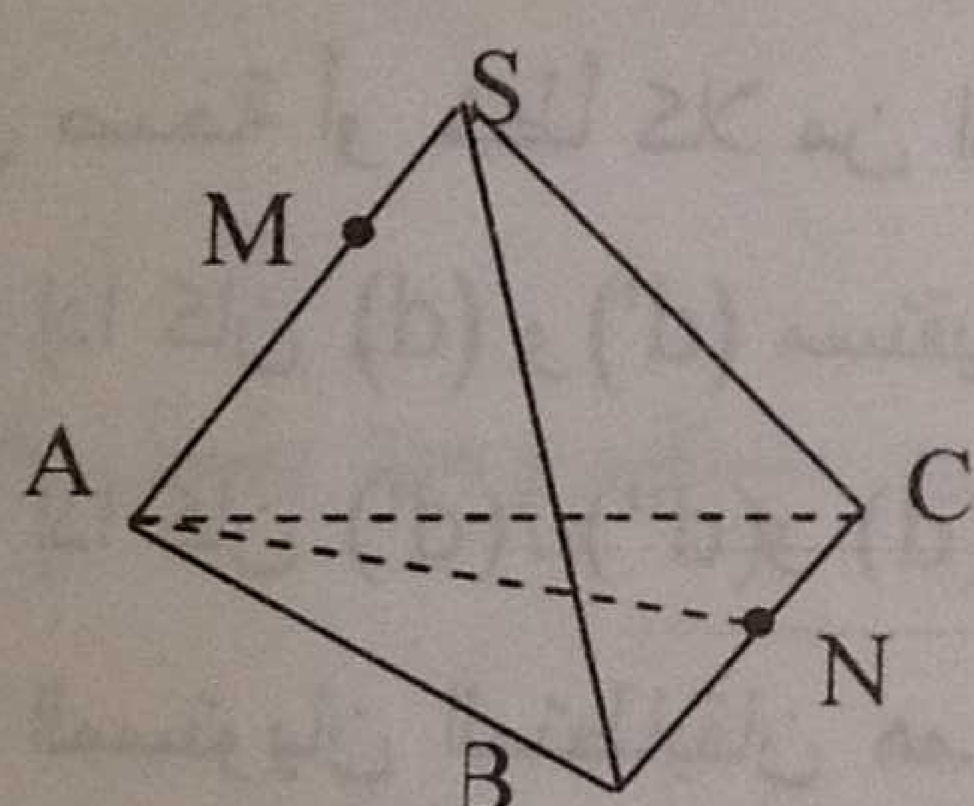
2) المستقيمان (GJ) و(BF) .

3) المستقيمان (EH) و (BJ).

4) المستويان (GFJ) و(EIH).

5) المستوي (AEH) والمستقيم (GI).6) المستوي (AEH) والمستقيم (GJ)

التمرين2:

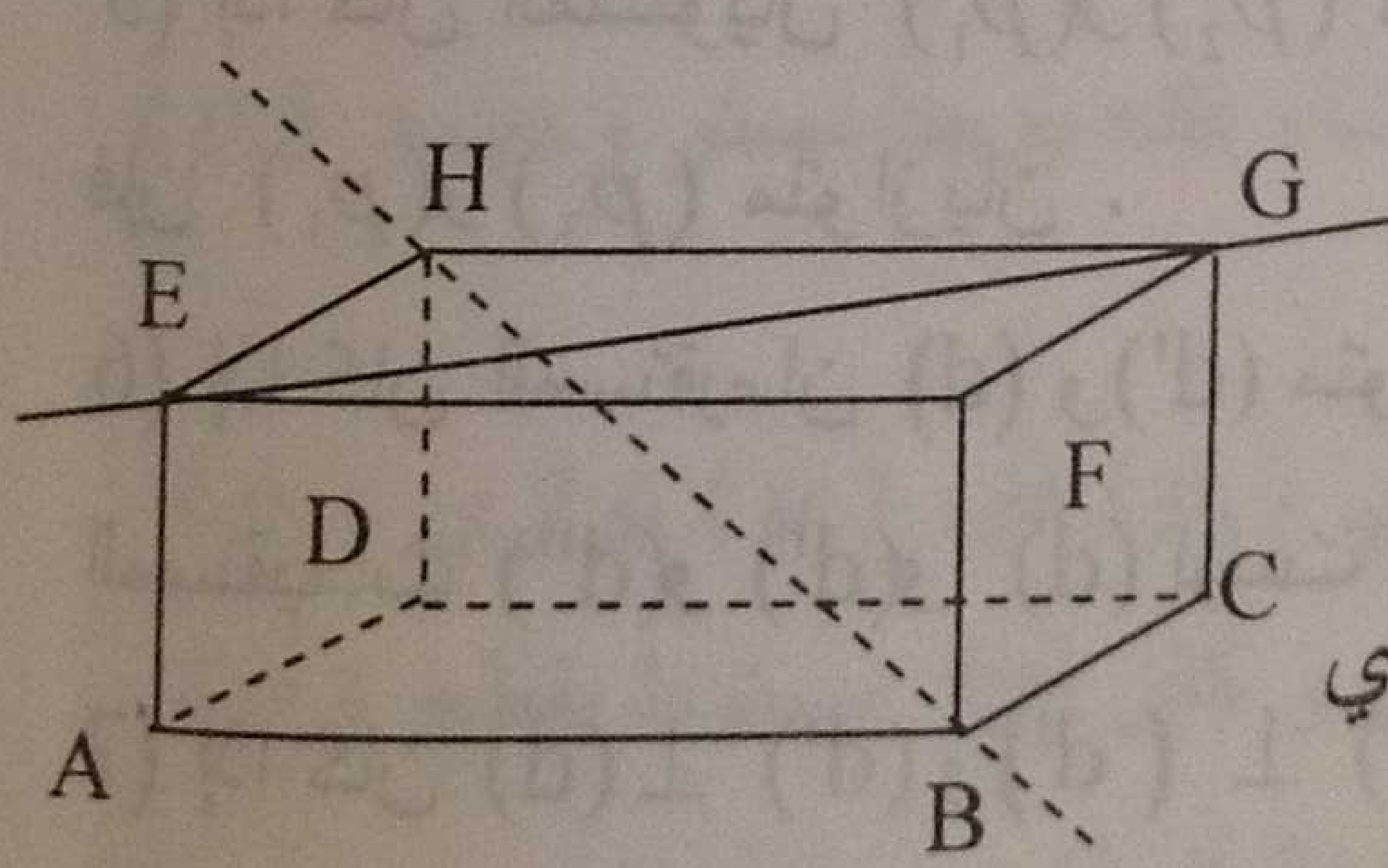


نعتبر الرباعي SABC ، و Nو M نقطتان من الحرفين [BC] و [SA] على الترتيب.

باستعمال الشكل عيّن في كل حالة مستويين تقاطعهما هو المستقيم:

1) (SM)، 2) (AN)، 3) (SN)، 4) (MN)، 5) (AC)، 6) (MC).

تمرين 3:



ABCDEFG متوازي المستطيلات

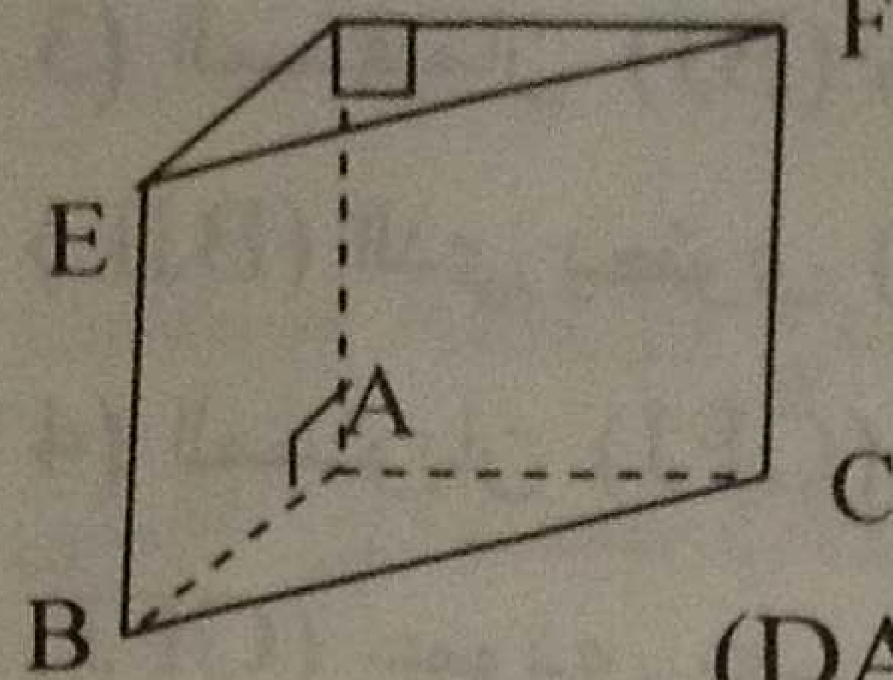
1) عين مستقيمين متعامدين

2) عين مستقيمين لايقعان في نفس المستوي

3) عين مستقيما تقاطع المستويين

(BCF) و(ADB) ، (EHG) و (EAD)

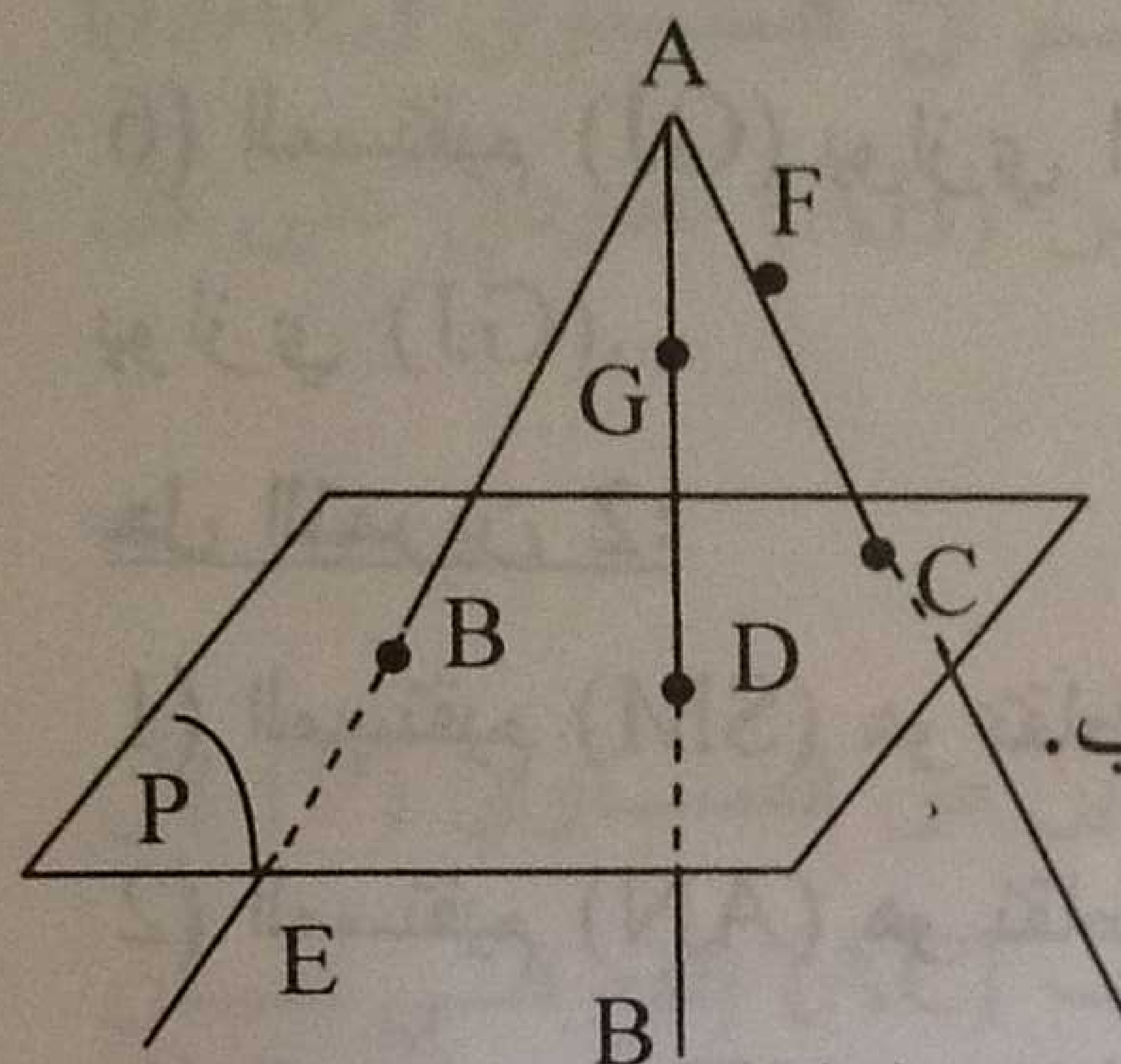
4) هل المستقيمان (EG) و(HB) يقعان في نفس المستوي ؟



التمرين 4:
ABCDEF موشور قاعدتاه، ABC و EFD مثلثان قائمان في A و D على الترتيب.

1) برهن أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (DAC)

2) ليكن M نقطة من القطعة [FC]. بيّن أن المستقيم (AB) عمودي على المستقيمات (DF) و(FC) و(AM).



التمرين 5:
BCD ثلاث نقط من مستوي (p). A نقطة خارج المستوي (π).E نظيرة A بالنسبة إلى B.
F وG منتصفا الضلعين [AC] و[AD] على الترتيب.

1) لماذا المستقيم (EF) يقطع المستوي (p)؟
ثم أنشئ النقطة k نقطة تقاطع المستقيم (EF) والمستوي (p).

2) بين أن المستقيم (FG) يوازي المستوي (p).

التمرين 6: باعتبار الشكل الموجود في التمرين 5.

1) ما هو المستوي الذي يشكله المستقيمين (GC) و(FD) ؟

2) عين مستقيما تقاطع المستويين (p)و(EBD) ثم المستويين (GCD)و(GBD)

3) عين نقطة تقاطع المستقيم (EB) والمستوي (GFC) ثم نقطة تقاطع المستقيم) (AC) والمستوي (BGF).

الحلول

حل التمرين 1:

1) المستقيمان (AI) و(BC) متعامدان لأن (BC) عمودي على المستوي (AIB) الذي يحتوي (AI) .

2) المستقيمان (GJ) و(BF) يقعان في نفس المستوي (BCF) ومتقاطعان .

3) المستقيمان (BJ) و(EH) متعامدان لأن (EH) عمودي على المستوي (BJF) الذي يحتوي (BJ).

4) المستويان (GFJ) و(EIH) متعامدان لأن المستقيم (GF) من المستوي (GFJ) عمودي على المستوي (EIH).

5) المستقيم (GI) يقطع المستوي (AEH) لأن المستقيم (GI) لا يوازي أي مستقيم من المستوي (AEH).

6) المستقيم (GJ) يوازي المستوي (AEH) لأن يوجد مستقيم من (AEH) يوازي (GJ).

حل التمرين 2:

1) المستقيم (SM) هو تقاطع المستويين (SAB) و(SAC)

2) المستقيم (AN) هو تقاطع المستويين(ABC) و(ANS)

3) المستقيم (SN) هو تقاطع المستويين(SNB) و(SNA)

4) المستقيم (AC) هو تقاطع المستويين(ACS) و(ACB)

5) المستقيم (MN) هو تقاطع المستويين(MNA) و(MNB)

6) المستقيم (MC) هو تقاطع المستويين (ASC) و(MCB)

حل التمرين 3:

1) (AB) و(FG) مستقيمان متعامدان لأن (AB) عمودي على المستوي (BCF) الذي يحتوي (FG).

2) (EG) و(HB) مستقيمان لا يقعان في نفس المستوي لأنهما غير متوازيين وغير متقاطعين وغير منطبقين .

3) المستقيم (BC) هو تقاطع المستويين(BCF) و(ABD)، والمستقيم (EH) هو تقاطع المستويين (EHG) و(EAD) .

4) المستقيمان (EG) و(HB) لا يقعان في نفس المستوي .

فإن الرباعي ABED مستطيل $(DF) \perp (ED)$

حل التمرين 4:

1) بما أن $(AC) \perp (AB)$ و $(AD) \perp (AB)$ إذن المستقيم (AB) عمودي على

أي $(AC) \perp (AB)$ و $(AD) \perp (AB)$

المستوي (DAC) .

2) بما أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (DAC) فإن (AB) عمودي

على كل مستقيم محتوى في المستوي (DAC) نعلم أن المستوي (DAC)

يحتوي على المستقيمات (DF)، (FC) و(AM) إذن (AB) عمودي على كل

من المستقيمات (DF) و(FC) و(AM).

حل التمرين 5:

1) نعلم أن النقطتين A و E تقعان في جهتين مختلفتين من المستوي (P) لأن

A و E متناظرتان بالنسبة إلى B وبما أن F منتصف [AC] (تقع في نفس

الجهة من A) فإن المستقيم (EF) يقطع المستوي (P).

لدينا في المثلث AEC، B ,F منتصفا الضلعين [AE] و[AC] أي (EF)

و(BC) متوسطان في هذا المثلث ونعلم أن المتوسطات الثلاثة في المثلث

تتقاطع في نقطة واحدة إذن K هي نقطة تقاطع المتوسطين (EF) و(BC)

(لاحظ أن K تنتمي إلى (P)).

2) لدينا في المثلث ADC . F و G منتصفا الضلعين [AC] و [AD] إذن

حسب إحدى الخواص فإن (FG) يوازي (DC) ونعلم أن المستقيم (DC)

محتوى في المستوي (P) إذن المستقيم (FG) يوازي المستوي (P).

حل التمرين 6:

1) المستوي الذي يعينه المستقيمين (GC) و(FD) هو (ADC) .

2) تقاطع المستويين (P) و(EBD) هو المستقيم (BD) وتقاطع المستويين

(GCD) و(GBD) هو المستقيم (GD).

3) A هي نقطة تقاطع المستقيم (EB) والمستوي (GFC)، و F هي نقطة تقاطع (AC) والمستوي (BGF).

14 الأشكال الهندسية المألوفة في الفضاء- المساحات والحجوم في الفضاء

✓ **تمثيل مجسم بالمنظور المتساوي القياس :**

يمكن تمثيل مجسم بالمنظور المتساوي القياس $\left(1;\frac{1}{2};30°\right)$ حيث نرسم الوجه الأمامي والوجه الخلفي بالسلم 1 ونرسم الأحرف التي لا تشارك في تشكيل الوجهين الأمامي والخلفي بقطع تكون زاوية قياسها 30° مع المستقيمات الأفقية وطولها يساوي $\frac{1}{2}$ طولها الحقيقي .

الخاصية :

* منتصف قطعة في الفضاء تمثل بالمنظور المتساوي القياس منتصف القطعة الممثلة

* توازي مستقيمين في الفضاء يمثل بالمنظور المتساوي القياس توازي مستقيمين

التمارين

التمرين 1:

مثل بالمنظور المتساوي القياس $\left(1;\frac{1}{2};30°\right)$ الرباعي SABC بحيث تكون القاعدة ABC مثلث قائم في A و AB=AC= 4cm، والارتفاع (SF) يشمل النقطة F منتصف [BC] و SF= 4cm.

التمرين 2: مثل بالمنظور المتساوي القياس $\left(1;\frac{1}{2};60°\right)$ متوازي المستطيلات ABCDEFGH حيث AB= 6cm ،AD= 3cm ،AE= 6cm و ABCD

هو الوجه المستوي الأمامي .

التمرين 3:

ABCD رباعي منتظم في الفضاء، طول حرفه $a.a$ عدد حقيقي موجب تماما

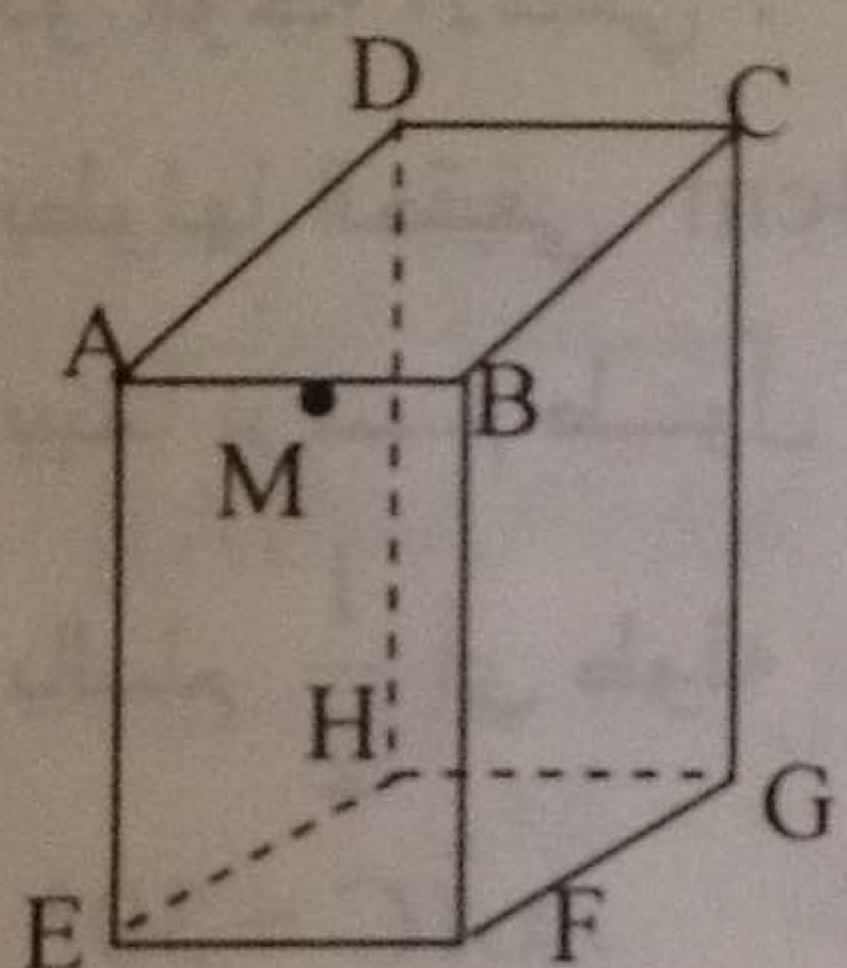
E، F، K منتصفات الأحرف [BC] و[CD] و[DB] على الترتيب

• احسب مساحة المجسم AEFK الجانبية .

• احسب النسبة $\frac{A_{AEFK}}{A_{ABCD}}$ حيث A_{ABCD} تشير إلى مساحة المجسم ABCD.

التمرين 4: ABCDEFGH متوازي المستطيلات حيث

AB= 2cm ، AD=4 cm ،AE=3cm



لتكن M نقطة متغيرة من الضلع [AB]

نضع $AM = x$ ، $\ell = EM + MC$

1) عبّر عن الطول EM ، بدلالة x.

2) عبّر عن الطول MC بدلالة x.

3) برهن أن $\ell = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(2-x)^2}$

التمرين 5:

نعتبر في كامل هذا التمرين كل المعطيات الموجودة في التمرين 4.

1) عيّن الوضعية النسبية للمستقيمين (BD)و(FH) ثم المستويين (AME) و(ADC).

2) عيّن نقطة تقاطع المستقيم (MF) والمستوي (MEG).

3) بيّن أنه مهما كانت النقطة M متغيرة من الضلع [AB] فإن مساحة المثلث EFM ثابتة (مستقلة عن العدد x) .

التمرين 6: ABCDEF موشور قاعدته مثلث ABC قائم في A حيث $AB = x(cm)$ ، $AC = x+1(cm)$ ، $BC = 5cm$ وارتفاعه $AF = 8cm$

x عدد حقيقي أكبر تماما من 2.

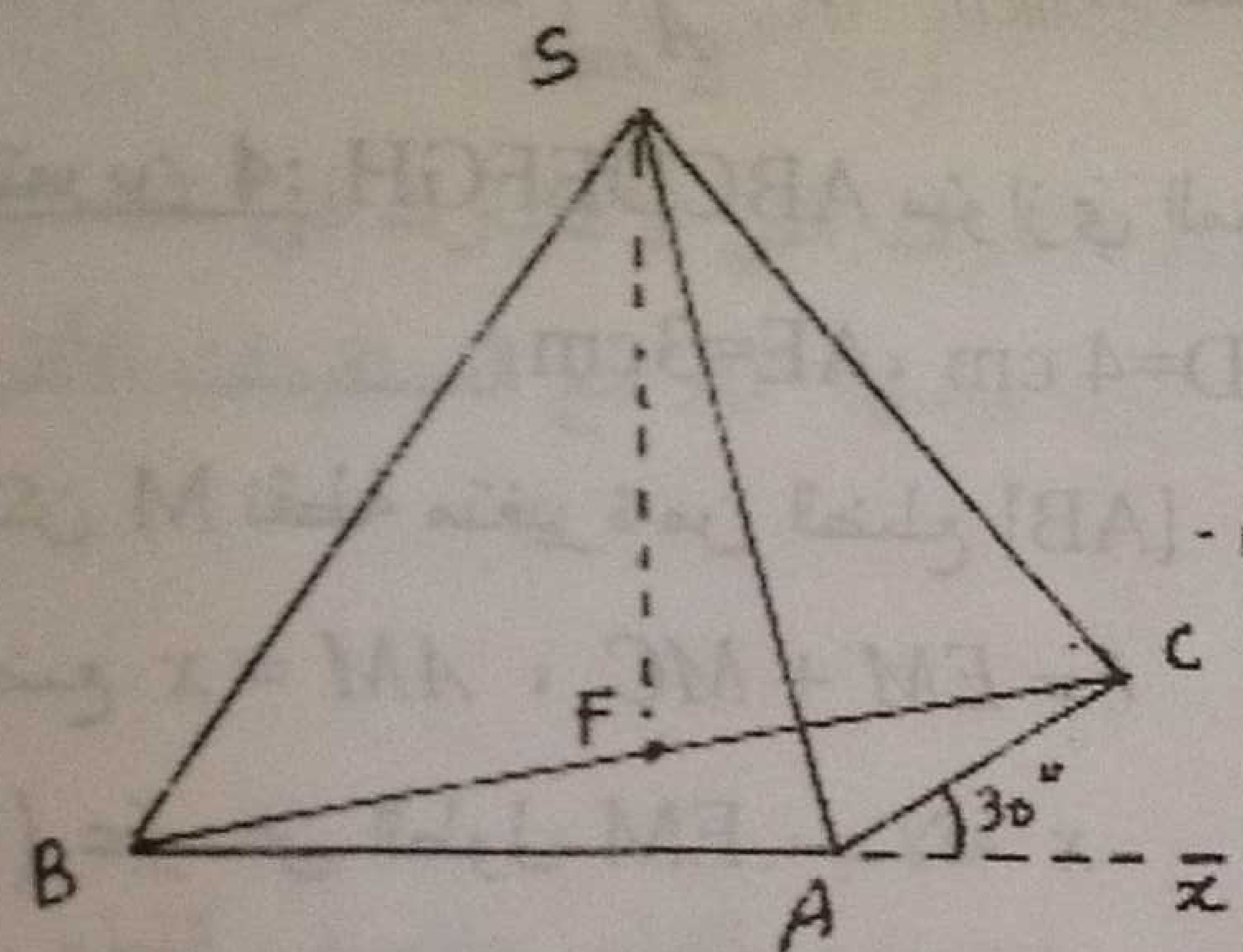
1) عبّر بدلالة x عن مساحة المثلث ABC وعن حجم موشور .

2) احسب بدلالة x المساحة الجانبية للموشور.

3) عين قيمة x بحيث يكون حجم الموشور يساوي $48cm^3$

4) عيّن مستويين متعامدان ومستويين متوازيين .

الحلول



حل التمرين 1:

نرسم القطعة [AB] من المستوي ذو الوجه الأمامي .

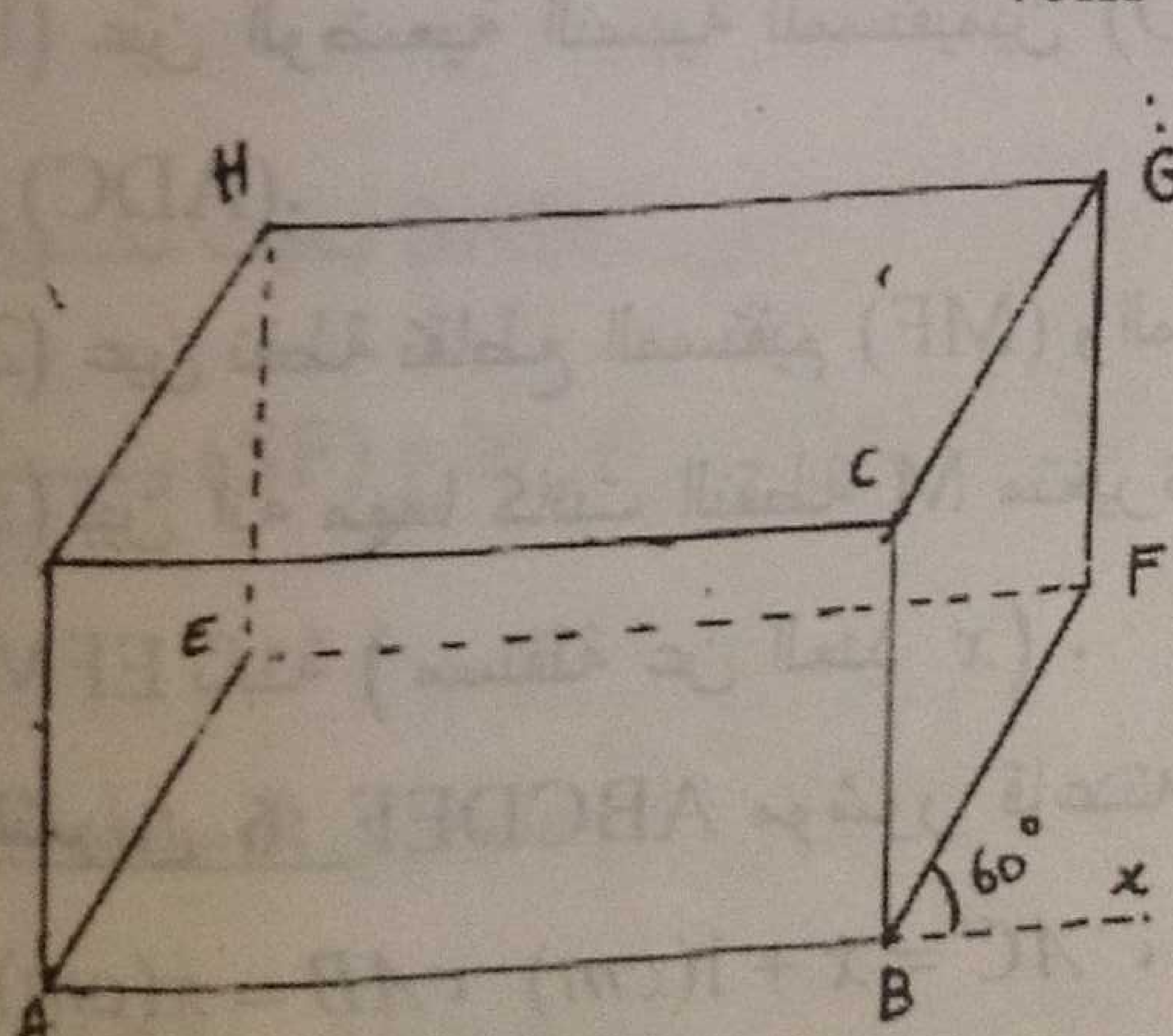
بطولها الحقيقي 4cm.

بينما نرسم طول الحرف AC بالسلم $\frac{1}{2}$ أي طوله 2cm والزاوية $x\hat{A}C = 30°$.

F منتصف [BC] تمثل بمنتصف القطعة الممثلة [BC].

المستقيم (SF) من المستوي ذو الوجه الخلفي عمودي على المستقيم (AB) إذن القطعة SF ممثلة بقيمتها الحقيقية 4cm.

التمرين 2:



نرسم القطعة AB من المستوي ذو الوجه الأمامي بطولها الحقيقي 6cm بينما نرسم طول الحرف AE بالسلم $\frac{1}{2}$ أي طولـه 3cm.

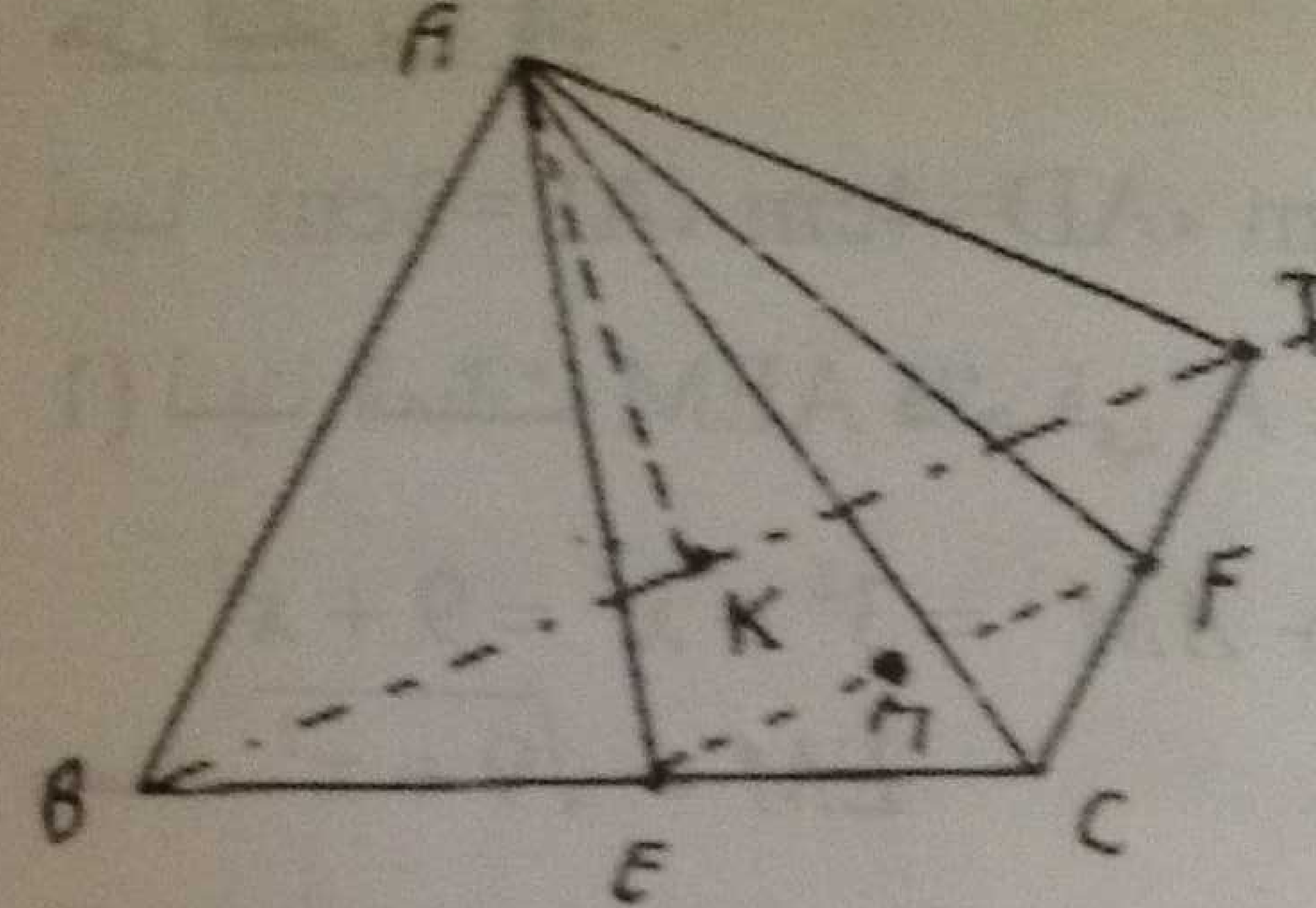
والزاوية $x\hat{B}F = 60°$

حل التمرين 3:

في الفضاء ABCD • بما أن الرباعي

$a = AB = BC = CD = DB = AC = AD$

فإن



لدينا المثلث BCD متقايس الأضلاع

وبما أن E، F، K منتصفات الأضلاع [BC] و[CD] و[BD] على الترتيب فإن المثلث EFK متقايس الأضلاع طول ضلعه

$$EF = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$$

• المساحة الجانبية للمجسم AEFK تساوي ثلاثة أضعاف مساحة المثلث المتساوي الساقين AEF لتكن M منتصف [EF] (نعلم أن AE=AF=AK)

$$AE^2 = AC^2 - EC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 \text{ ومنه } AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$MA^2 = AE^2 - EM^2 = \frac{3}{4}a^2 - \left(\frac{1}{2}EF\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

ومنه $MA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

مساحة المثلث AEF هي $S_1 = \frac{1}{2} \times EF \times MA = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{8}a^2$

أن مساحة المجسم AEFK هي $S = 3S_1 = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{8}a^2 = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^2$

• نحسب مساحة المجسم ABCD الجانبية وتساوي ثلاثة أضعاف مساحة المثلث ABC المتقايس الأضلاع وهي

$$S_3 = 3 \times \frac{1}{2} \times BC \times AE = 3 \times \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

إذن $\frac{A_{AEFK}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}a^2}{8}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2} = \frac{1}{2}$

حل التمرين 4:

لدينا $AE=3cm$ ، $AD=4cm$ ، $AB=2cm$ ، $AM = x$ ، $\ell = EM + MC$

1) لدينا المثلث AEM قائم في A حسب نظرية فيتاغورس .

$$EM^2 = AE^2 + AM^2 = 3^2 + x^2 = 9 + x^2$$

ومنه $EM = \sqrt{9 + x^2}$

2) لدينا المثلث MBC قائم في B حسب نظرية فيتاغورس .

$MC^2 = BC^2 + MB^2 = 16 + (2-x)^2$ ومنه $MC = \sqrt{16 + (2-x)^2}$

3) $\ell = EM + MC = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{16 + (2-x)^2}$

حل التمرين 5:

1) المستقيمان (BD) و(FH) متوازيان لأن الرباعي BFHD مستطيل .

والمستويان (AME) و(ADC) متعامدان ومستقيم تقاطعهما هو (AB).

2) نقطة تقاطع المستقيم (MF) والمستوي (MEG) هي M.

3) مساحة المثلث MEF هي $\frac{1}{2} \times EF \times AE = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3cm^2$

وهي مستقلة عن العدد x.

حل التمرين 6:

لدينا $AB = x(cm)$ ، $AC = x + 1(cm)$ ، $BC = 5cm$ ، $AF = 8cm$

1) مساحة المثلث ABC هي

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2}(x)(x+1) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

حجم الموشور هو: $V = B \times h = \frac{1}{2}(x^2 + x) \times 8 = 4(x^2 + x)$

2) المساحة الجانبية للموشور هي :

$$S_1 = AC \times AF + AB \times AF + BC \times AF$$
$$= (AC + AB + BC) \times AF$$
$$= (x + x + 1 + 5) \times 8 = 16x + 48$$

3) $V = 48$ معناه: $4(x^2 + x) = 48$

أي $4x^2 + 4x - 48 = 0$ إذن $x^2 + x - 12 = 0$ أي $(x-3)(x+4)$

إذن $x = 3$ أو $x = -4$ (مرفوض) . ومنه $x = 3$.

الفهرس

الأنشطة العددية

الأنشطة الهندسية













دار السعادة
للطباعة والنشر والتوزيع

حي 1200 مسكن تعاونية ديار النور عمارة "ب" رقم 3
باب الزوار- الجزائر. الهاتف: Tél-Fax :021.24.39.58

ردمك: ISBN: 9961-721-54-3